Buletin Ilmiah Mat. Stat. dan Terapannya (Bimaster)
Volume 04, No. 3 (2015), hal 337-346

DIAGONALISASI MATRIKS KOMPLEKS

Heronimus Hengki, Helmi, Mariatul Kiftiah

INTISARI

Matriks kompleks merupakan matriks yang entri-entrinya bilangan kompleks. Matriks kompleks terdiri dari matriks hermit jika A=A, hermit miring jika –A=A*, matriks satuan (uniter) jika A^{-1}=A* dan matriks normal jika AA*=A*A. Penelitian ini mengkaji syarat matriks kompleks supaya bisa didiagonalisasikan. Suatu matriks kompleks A bisa didiagonalisasikan secara satuan jika dan hanya jika terdapat matriks satuan P yang digunakan untuk mendiagonalkan matriks kompleksnya. Langkah pertama mendiagonalisasi matriks A adalah menentukan persamaan karakteristik dari polinomial karakteristik untuk mencari nilai eigen dan vektor eigennya. Selanjutnya, membentuk vektor basis untuk masing-masing vektor eigen dari matriks A, kemudian menerapkan proses Gram-Schmidt pada masing-masing vektor basis sehingga diperoleh suatu basis ortonormal. Matriks baru P dibentuk dari vektor-vektor basis yang ortonormal. Jika matriks P yang terbentuk merupakan matriks satuan maka matriks diagonalnya dapat dicari dengan menghitung $P^{-1}AP=P^*AP=D$, dimana D adalah matriks diagonal, P^{-1} adalah invers dari matriks P, dan P^* adalah transpose konjugat dari matriks P.*

***Kata Kunci**: matriks kompleks, proses Gram-Schmidt, diagonalisasi satuan*

PENDAHULUAN

Aljabar merupakan salah satu cabang dari ilmu matematika yang didalamnya secara khusus memuat tentang matriks. Matriks merupakan suatu susunan bilangan-bilangan dalam bentuk persegi atau persegi panjang yang disusun berdasarkan aturan baris dan kolom. Bilangan-bilangan yang disusun berdasarkan aturan baris dan kolom disebut sebagai entri dari matriks. Susunan bilangan seperti ini ditemui dalam berbagai cabang ilmu matematika terapan. Dalam banyak kasus susunan ini membentuk koefisien-koefisien transformasi linear atau sistem persamaan linear [1]. Jenis-jenis matriks diantaranya matriks persegi, matriks identitas, matriks diagonal, matriks simetri, dan matriks ortogonal. Matriks-matriks tersebut seringkali digunakan dengan entri-entrinya bilangan real. Selain matriks-matriks tersebut terdapat juga matriks-matriks yang entrinya bilangan kompleks diantaranya matriks normal, matriks hermit, matriks hermit miring dan matriks satuan. Suatu matriks persegi A dengan entri-entrinya bilangan kompleks disebut matriks normal jika $AA^* = A^*A$, disebut matriks hermit jika $A = A^*$, disebut matriks hermit miring jika $-A = A^*$ dan disebut matriks satuan jika $A^{-1} = A^*$ [2].

Salah satu jenis matriks persegi yang sering digunakan dalam berbagai aplikasi atau penelitian adalah matriks diagonal. Matriks diagonal merupakan salah satu bentuk matriks persegi dengan semua entri diluar diagonal utamanya nol dan paling tidak satu entri pada diagonal utamanya tidak sama dengan nol. Jika suatu matriks A berbentuk diagonal, maka entri diagonal utama dari matriks A adalah nilai-nilai eigen dari matriks A. Beberapa matriks yang bukan berbentuk matriks diagonal dapat diubah menjadi matriks diagonal dengan proses diagonalisasi. Diagonalisasi matriks merupakan suatu proses terhadap matriks persegi A untuk mencari matriks diagonal D yang similar terhadap matriks A. Matriks D dikatakan similar terhadap A jika terdapat matriks invertibel P sedemikian sehingga $A = PDP^{-1}$ [3]. Pada matriks dengan entri-entrinya bilangan real, matriks ortogonal $A^{-1} = A^T$ mempunyai peranan penting didalam permasalahan diagonalisasi. Sedangkan matriks dengan entri-entri bilangan kompleks, peran utama digantikan oleh suatu matriks satuan (*uniter*) [2]. Berdasarkan latar belakang tersebut syarat apa yang harus dipenuhi dalam mendiagonalisasikan matriks kompleks dan bagaimana membentuk matriks diagonalnya. Penelitian ini bertujuan mengkaji syarat matriks kompleks agar bisa didiagonalisasikan dan membentuk matriks diagonal pada matriks kompleks tersebut. Untuk mendiagonalkan matriks kompleks persegi A langkah pertama menentukan persamaan karakteristik dari polinomial karakteristik $P(\lambda)$. Kemudian mencari nilai eigen λ dan vektor eigen $\boldsymbol{x} = x_1, x_2, \ldots, x_n$ dari matriks A. Dari vektor eigen ini dibentuk vektor basis $\boldsymbol{u} = u_1, u_2, \ldots, u_n$. Selanjutnya lakukan normalisasi dengan menggunakan proses Gram-Schmid $P_n = \frac{u_n}{\|u_n\|}$ untuk mendapatkan vektor-vektor basis $\boldsymbol{P} = P_1, P_2, \ldots, P_n$ yang ortonormal. Setelah itu bentuk matriks satuan P yang kolom-kolomnya adalah vektor-vektor basis P_n. Dari matriks P dibentuk matriks P^* atau *transpose* konjugatnya. Kemudian periksa apakah matriks P yang terbentuk merupakan matriks satuan dengan menunjukkan $P^*P = I$. Jika tidak matriks A tidak dapat didiagonalisasikan. Jika ya, maka selanjutnya lakukan diagonalisasi matriks dengan menghitung $P^{-1}AP = P^*AP = D$, dimana $D = diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ dan D adalah matriks diagonal yang terbentuk dari matriks A. Dengan kata lain matriks P mendiagonalkan matriks A secara satuan.

MATRIKS KOMPLEKS

Pada umumnya definisi matriks adalah suatu susunan bilangan-bilangan dalam bentuk persegi atau persegi panjang yang disusun berdasarkan aturan baris dan kolom. Bilangan-bilangan yang disusun berdasarkan aturan baris dan kolom disebut sebagai entri dari matriks. Matriks kompleks merupakan matriks yang entri-entrinya terdiri atas bilangan kompleks [4].

Misalkan $\mathbb{C} = (c_{ij})$ adalah suatu matriks $m \times n$ dengan $c_{ij} = a_{ij} + ib_{ij}$ untuk setiap i dan j merupakan baris ke i dan kolom ke j. Matriksnya dapat ditulis kembali kedalam bentuk $\mathbb{C} = A + iB$ dimana $A = a_{ij}$ dan $B = b_{ij}$ mempunyai entri bilangan real, dan i adalah imajiner. Secara umum dapat ditulis

$$\mathbb{C} = \begin{bmatrix} a_{11} + ib_{11} & a_{12} + ib_{12} & \cdots & a_{1n} + ib_{1n} \\ a_{21} + ib_{21} & a_{22} + ib_{22} & \cdots & a_{2n} + ib_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + ib_{m1} & a_{m2} + ib_{m2} & \cdots & a_{mn} + ib_{mn} \end{bmatrix}.$$

Dalam hal ini ruang vektor untuk matriks $m \times n$ dengan entrinya bilangan kompleks disimbolkan $\mathbb{C}^{m \times n}$.

Sebuah matriks A dengan n baris dan n kolom disebut matriks persegi berordo n dan entri-entrinya $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ disebut sebagai diagonal utama dari A. Operasi-operasi penjumlahan, pengurangan dan perkalian matriks kompleks sama seperti matriks real. Dalam hal ini diberikan dua matriks yang didefinisikan sama jika keduanya mempunyai ukuran yang sama dan dengan entri-entrinya yang berpadanan sama, maka jumlah atau selisih dari kedua matriks tersebut dapat diperoleh dengan menjumlahkan atau mengurangkan semua entri-entri yang bersesuaian pada kedua matriks tersebut. Matriks yang ukurannya berbeda tidak dapat dijumlahkan atau dikurangkan. Sedangkan perkalian matriks jika A adalah sebuah matriks $m \times r$ dan B adalah sebuah matriks $r \times n$, maka AB adalah matriks $m \times n$ yang setiap entri-entrinya merupakan jumlahan hasil kali entri pada baris i dari matriks A dengan kolom j dari matriks B, yang berpadanan dari baris dan kolom secara bersama-sama [2].

Definisi 1 [5] *Jika A adalah suatu matriks dengan entri-entri bilangan kompleks, maka transpose konjugat dari A, yang dinyatakan dengan* A^*, *didefinisikan oleh* $A^* = \bar{A}^T$ *dengan* $\bar{A}$ *adalah matriks yang entri-entrinya adalah konjugat kompleks dari entri-entri yang berpadanan pada A dan* $\bar{A}^T$ *adalah transpose dari* $\bar{A}$.

Teorema 2 [5] *Jika A dan B adalah matriks-matriks dengan entri-entri bilangan kompleks dan k adalah sebarang bilangan kompleks, maka* :
(a). $(A^*)^* = A$

(b). $(A+B)^* = A^* + B^*$
(c). $(kA)^* = \bar{k}A^*$
(d). $(AB)^* = B^*A^*$

Bukti:
Dimisalkan $A = [a_{ij}]_{m\times r}$, $B = [b_{ij}]_{r\times n}$, dan $AB = [a_{ir}b_{rj}]_{m\times n}$, berdasarkan Definisi 1 maka
(a). $(A^*)^* = (\bar{a}_{ij}{}^T)^* = (\bar{a}_{ji})^* = (\bar{\bar{a}}_{ji})^T = (a_{ji})^T = (a_{ij}) = A.$ □
(b). $(A+B)^* = (a_{ij}+b_{ij})^* = \overline{(a_{ij}+b_{ij})}^T = \overline{a_{ji}+b_{ji}} = (\bar{a}_{ji}+\bar{b}_{ji}) = A^* + B^*$□
(c). $(kA)^* = (ka_{ij})^* = (\overline{ka}_{ij})^T = (\overline{ka}_{ji}) = (\bar{k}\bar{a}_{ji}) = \bar{k}(\bar{a}_{ji}) = \bar{k}A^*.$ □
(d). Untuk bukti (d) kita anggap entri-entri yang bersesuaian dari $(AB)^*$ dan B^*A^* adalah sama, yaitu

$$((AB)^*)_{ij} = (B^*A^*)_{ij} \tag{1}$$

Dari ruas kiri Persamaan (1) berdasarkan perkalian matriks diperoleh

$$((AB)^*)_{ij} = \left(\overline{(AB)}^T\right)_{ji} = a_{j1}b_{1i} + a_{j2}b_{2i} + \cdots + a_{jr}b_{ri} \tag{2}$$

Dari ruas kanan Persamaan (1) jika dimisalkan $A^* = a_{ij}{}^*$ dan $B^* = b_{ij}{}^*$ sehingga $a_{ij}{}^* = \overline{a_{ij}}^T = a_{ji}$ dan $b_{ij}{}^* = \overline{b_{ij}}^T = b_{ji}$. Dari hubungan tersebut berdasarkan perkalian matriks kita memperoleh

$$\begin{aligned}(B^*A^*)_{ij} &= b_{i1}{}^*a_{1j}{}^* + b_{i2}{}^*a_{2j}{}^* + \cdots + b_{ir}{}^*a_{rj}{}^* \\ &= b_{1i}a_{j1} + b_{2i}a_{j2} + \cdots + b_{ri}a_{jr} \\ &= a_{j1}b_{1i} + a_{j2}b_{2i} + \cdots + a_{jr}b_{ri}\end{aligned} \tag{3}$$

Jadi berdasarkan Persamaan (2) dan (3) yang memenuhi Persamaan (1) dapat disimpulkan bahwa $(AB)^* = B^*A^*$. □

Misalkan A adalah suatu matriks $n \times n$. Skalar λ disebut nilai eigen dari A jika terdapat suatu vektor tak nol $\boldsymbol{x}$ yang memenuhi $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$. Vektor $\boldsymbol{x}$ disebut vektor eigen dari A yang berpadanan dengan nilai eigen λ [4].

Persamaan $A\mathbf{x} = \boldsymbol{\lambda}\mathbf{x}$ dapat dituliskan kedalam bentuk $(\lambda I - A)\mathbf{x} = 0$ (4)
Persamaan (4) mempunyai solusi nontrivial jika $(\lambda I - A)$ singular atau $\det(\lambda I - A) = 0$. $\mathrm{Det}(\lambda I - A)$ disebut sebagai polinomial karakteristik yang dinotasikan dengan $P(\lambda)$. $P(\lambda) = 0$ adalah persamaan karakteristik dari A.

Definisi 3 [6] *Suatu matriks kompleks persegi A disebut matriks satuan jika $A^{-1} = A^*$ atau memenuhi $A^*A = AA^* = I$.*

Teorema 4 [1] *Suatu matriks persegi A dikatakan satuan jika dan hanya jika vektor-vektor kolomnya dan juga vektor-vektor barisnya membentuk suatu sistem satuan.*
Bukti:
Jika A adalah suatu matriks satuan dengan vektor-vektor kolom $a_1, a_2, \dots, a_n$, dimana $a_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}$, $a_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{bmatrix}, \dots, a_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{bmatrix}$ sehingga $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ dan
$A^* = \begin{bmatrix} a_{11}{}^* & a_{21}{}^* & \cdots & a_{n1}{}^* \\ a_{12}{}^* & a_{22}{}^* & \cdots & a_{n2}{}^* \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{1n}{}^* & a_{2n}{}^* & \cdots & a_{nn}{}^* \end{bmatrix}$ maka menurut Definisi 3.16 (definisi matriks satuan) diperoleh

$$A^*A = \begin{bmatrix} a_{11}{}^* & a_{21}{}^* & \cdots & a_{n1}{}^* \\ a_{12}{}^* & a_{22}{}^* & \cdots & a_{n2}{}^* \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{1n}{}^* & a_{2n}{}^* & \cdots & a_{nn}{}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} {a_{11}}^*a_{11}+{a_{21}}^*a_{21}+\cdots+{a_{n1}}^*a_{n1} & {a_{11}}^*a_{12}+{a_{21}}^*a_{22}+\cdots+{a_{n1}}^*a_{n2} & \cdots & {a_{11}}^*a_{1n}+{a_{21}}^*a_{2n}+\cdots+{a_{n1}}^*a_{nn} \\ {a_{12}}^*a_{11}+{a_{22}}^*a_{21}+\cdots+{a_{n2}}^*a_{n1} & {a_{12}}^*a_{12}+{a_{22}}^*a_{22}+\cdots+{a_{n2}}^*a_{n2} & \cdots & {a_{12}}^*a_{1n}+{a_{22}}^*a_{2n}+\cdots+{a_{n2}}^*a_{nn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ {a_{1n}}^*a_{11}+{a_{2n}}^*a_{21}+\cdots+{a_{nn}}^*a_{n1} & {a_{1n}}^*a_{12}+{a_{2n}}^*a_{22}+\cdots+{a_{nn}}^*a_{n2} & \cdots & {a_{1n}}^*a_{1n}+{a_{2n}}^*a_{2n}+\cdots+{a_{nn}}^*a_{nn} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = I \tag{5}$$

sehingga

$$ {a_j}^* a_k = \begin{cases} 0 & \text{jika } j \neq k, \\ 1 & \text{jika } j = k. \end{cases} \tag{6}$$

Ini menunjukkan bahwa vektor-vektor kolom matriks A membentuk suatu sistem satuan. Sebaliknya, jika vektor-vektor kolom matriks A memenuhi (6) unsur-unsur diluar diagonal utama bernilai nol, sedangkan pada diagonal utama bernilai 1. Oleh karena itu $A^*A = I$, yang ditunjukkan oleh (5). Begitu pula untuk $AA^* = I$, hal ini berimplikasi bahwa $A^* = A^{-1}$. Karena $A^{-1}A = AA^{-1} = I$ dan bersifat tunggal. Jadi A adalah matriks satuan. □

Teorema 5 [2] *Jika A adalah suatu matriks $n \times n$ dengan entri-entri bilangan kompleks, maka pernyataan berikut ini ekuivalen.*

(a). *A adalah matriks satuan*

(b). *Vektor-vektor baris dari A membentuk suatu himpunan ortonormal pada $\mathbb{C}^n$ dengan hasil kali dalam euclidean.*

(c). *Vektor-vektor kolom dari A membentuk suatu himpunan ortonormal pada $\mathbb{C}^n$dengan hasil kali dalam euclidean.*

Bukti:

(a) $\Leftrightarrow (b)$

Misalkan matriks $A = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{bmatrix}$ dan $A^* = [{r_1}^* \quad {r_2}^* \quad \cdots \quad {r_n}^*]$ sehingga hasil kali titik baris ke-i dan kolom ke-j antara matriks A dan A^* adalah $AA^* = \begin{bmatrix} r_1 \cdot {r_1}^* & r_1 \cdot {r_2}^* & \cdots & r_1 \cdot {r_n}^* \\ r_2 \cdot {r_1}^* & r_2 \cdot {r_2}^* & \cdots & r_2 \cdot {r_n}^* \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r_n \cdot {r_1}^* & r_n \cdot {r_2}^* & \cdots & r_n \cdot {r_n}^* \end{bmatrix}$, karena vektor kolom ke-j dari A^* adalah vektor baris ke-j dari A. Jadi vektor-vektor baris dari A adalah $\{r_1, r_2, \dots, r_n\}$, dan berdasarkan definisi $A^{-1} = A^*$ jika dan hanya jika $AA^* = I$ maka $r_1 \cdot {r_1}^* = r_2 \cdot {r_2}^* = \cdots = r_n \cdot {r_n}^* = 1$ dan $r_i \cdot {r_j}^* = 0$ jika $i \neq j$. Yang berarti jika dan hanya jika $\{r_1, r_2, \dots, r_n\}$ adalah suatu himpunan ortonormal pada $\mathbb{C}^n$. □

(a) $\Leftrightarrow (c)$

Misalkan matriks $A = [r_1 \quad r_2 \quad \cdots \quad r_n]$ dan $A^* = \begin{bmatrix} {r_1}^* \\ {r_2}^* \\ \vdots \\ {r_n}^* \end{bmatrix}$ sehingga hasil kali titik baris ke-i dan kolom ke-j antara matriks A^* dan A adalah $A^*A = \begin{bmatrix} {r_1}^* \cdot r_1 & {r_1}^* \cdot r_2 & \cdots & {r_1}^* \cdot r_n \\ {r_2}^* \cdot r_1 & {r_2}^* \cdot r_2 & \cdots & {r_2}^* \cdot r_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ {r_n}^* \cdot r_1 & {r_n}^* \cdot r_2 & \cdots & {r_n}^* \cdot r_n \end{bmatrix}$, karena vektor baris ke-i dari A^* adalah vektor kolom ke-i dari A. Jadi vektor-vektor kolom dari A adalah $\{r_1, r_2, \dots, r_n\}$, dan berdasarkan definisi $A^{-1} = A^*$ jika dan hanya jika $A^*A = I$ maka ${r_1}^* \cdot r_1 = {r_2}^* \cdot r_2 = \cdots = {r_n}^* \cdot r_n = 1$ dan ${r_i}^* \cdot r_j = 0$ jika $i \neq j$. Yang berarti jika dan hanya jika

$\{r_1, r_2, \dots, r_n\}$ adalah suatu himpunan ortonormal pada $\mathbb{C}^n$. □

Definisi 6 [2] *Suatu matriks persegi A dengan entri-entri bilangan kompleks disebut hermit jika $A = A^*$.*

Teorema 7 [4] (*Teorema schur) Untuk setiap matriks B yang berordo $n \times n$ terdapat matriks satuan A sehingga A^*BA adalah matriks segitiga atas (upper triangular).*

Bukti:
Pembuktian dilakukan dengan induksi matematika terhadap n.
(i). Untuk $n = 1$, jelas matriks $n \times n = 1 \times 1 = [1]$ adalah matriks segitiga atas.
(ii). Untuk $n = k$,
Diasumsikan bahwa hipotesis berlaku untuk matriks $k \times k$ dan misalkan B adalah suatu matriks $(k+1) \times (k+1)$. Misalkan λ_1 adalah nilai eigen dari B dan w_1 adalah vektor eigen satuan milik λ_1. Dengan proses gram-schmidth $w_2, \dots, w_{k+1}$ sedemikian rupa sehingga $\{w_1, w_2, \dots, w_{k+1}\}$ adalah suatu basis ortonormal untuk $\mathbb{C}^{k+1}$. Misalkan W adalah suatu matriks yang vektor kolom ke-i nya adalah w_1 untuk $i = 1, \dots, k+1$. Jadi dengan susunan ini W adalah matriks satuan. Kolom pertama dari W^*BW akan menjadi W^*Bw_1. Dimana
$W^*Bw_1 = \lambda_1 W^* w_1 = e_1$.

Jadi W^*BW adalah suatu matriks berbentuk $\begin{bmatrix} \lambda_1 & \times & \times & \cdots & \times \\ 0 & & & & \\ 0 & & & & \\ 0 & & M & & \\ 0 & & & & \\ 0 & & & & \end{bmatrix}$

Dimana M adalah suatu matriks $k \times k$ berdasarkan hipotesis induksi, terdapat matriks satuan V_1 berorde $k \times k$, sedemkian sehingga ${V_1}^* M V_1 = T_1$, dimana T_1 adalah matriks segitiga. Misalkan

$V = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & & \\ 0 & & & & \\ 0 & & V_1 & & \\ 0 & & & & \\ 0 & & & & \end{bmatrix}$ Karena V_1 adalah matriks satuan dan kolom pertama pada matriks $V = 0$ kecuali V_{11} maka berakibat V dalah matriks satuan.

Jelas $V^*W^*BWV = \begin{bmatrix} \lambda_1 & x & x & \cdots & x \\ 0 & & & & \\ 0 & & & & \\ 0 & & {V_1}^* M V_1 & & \\ 0 & & & & \\ 0 & & & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & x & x & \cdots & x \\ 0 & & & & \\ 0 & & & & \\ 0 & & T_1 & & \\ 0 & & & & \\ 0 & & & & \end{bmatrix} = T$

Misalkan $A = WV$, karena $A^*A = (WV)^*WV = V^*W^*WV = V^*V = I$.
Maka A adalah matriks satuan.
Sehingga $A^*BA = (WV)^*BWV = V^*W^*BWV = T$.
Jadi dari (i) dan (ii), n berlaku untuk $n = k+1$ apabila $n = k$, dengan kata lain dapat disimpulkan untuk setiap matriks B berorde $n \times n$, terdapat matriks satuan A sehingga A^*BA adalah matriks segitiga atas. □

Teorema 8 [4] *Jika B adalah matriks hermit, maka akan terdapat suatu matriks satuan A yang mendiagonalkan B.*

Bukti:
Diketahui matriks hermit merupakan matriks persegi, berdasarkan Teorema 7, terdapat matriks satuan

A sehingga $A^*BA = T$, dimana T adalah matriks segitiga atas. Karena B matriks hermit maka $B = B^*$, dan apabila
$T = A^*BA$
$\Leftrightarrow T^* = (A^*BA)^* = A^*B^*A = A^*BA = T$
Dengan demikian T adalah hermit. Karena T hermit dan T adalah matriks segitiga atas maka T diagonal. Jadi matriks A mendiagonalkan B secara satuan. □

Teorema 9 [2] *Nilai eigen dari suatu matriks hermit adalah bilangan real.*

Bukti:

Diberikan λ adalah suatu nilai eigen dan $\boldsymbol{x}$ adalah vektor eigen yang berpadanan dari suatu matriks hermit $A_{n\times n}$, sehingga persamaannya adalah $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$. Selanjutnya mengalikan setiap ruas persamaan dari sebelah kiri dengan *transpose* konjugatnya adalah $\boldsymbol{x}^*$, diperoleh

$$\boldsymbol{x}^*A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^*(\lambda\boldsymbol{x}) = \lambda\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{x}$$

Berdasarkan Definisi 1 dimana $\boldsymbol{x}^* = \overline{\boldsymbol{x}}^T$ dan $\boldsymbol{x}$ merupakan vektor eigen sehingga hasil kali dalam berikut berlaku $\overline{\boldsymbol{x}}^T\boldsymbol{x} = \bar{x}^T{}_1x_1 + \bar{x}^T{}_1x_1 + \cdots + \bar{x}^T{}_nx_n = |x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_n|^2$ dan hasilnya adalah bilangan real, bukan nol. Karena $\boldsymbol{x} \neq 0$, sehingga bisa dilakukan pembagian untuk memperoleh λ dimana $\lambda = \frac{\boldsymbol{x}^*\mathrm{A}\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{x}}$. Jadi λ pastilah bilangan real. □

Suatu matriks persegi A dengan entri-entri kompleks disebut hermit miring (skew hermit) jika memenuhi $-\mathrm{A} = \mathrm{A}^*$[1]. Selanjutnya suatu matriks persegi A dengan entri-entri kompleks disebut normal jika memenuhi $\mathrm{AA}^* = \mathrm{A}^*\mathrm{A}$ [2].

Teorema 10 [2] *Jika A adalah suatu matriks normal, maka vektor eigen dari ruang eigen yang berbeda dari A adalah ortogonal.*

Bukti:

Andaikan x_1 dan x_2 adalah vektor eigen yang berpadanan dengan nilai eigen λ_1 dan λ_2 yang berbeda dari matriks A. Akan ditunjukkan bahwa $x_1 \cdot x_2 = 0$. Untuk membuktikan ini diawali dengan mengalikan A dengan $x_1 \cdot x_2$, dalam hal ini matriks hermit A adalah normal. Sehingga $Ax_1 \cdot x_2 = x_1 \cdot A^* \cdot x_2 = x_1 \cdot A \cdot x_2$, karena x_1 adalah suatu vektor eigen dari A yang berpadanan dengan λ_1 dan x_2 adalah suatu vektor eigen dari A yang berpadanan dengan λ_2, sehingga dihasilkan hubungan $\lambda_1 \cdot x_1 \cdot x_2 = x_1 \cdot \lambda_2 \cdot x_2$ yang bisa ditulis ulang sebagai $(\lambda_1 - \lambda_2)(x_1 \cdot x_2) = 0$, akan tetapi untuk $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$ karena λ_1 dan λ_2 dianggap berbeda. Jadi dari $(\lambda_1 - \lambda_2)(x_1 \cdot x_2) = 0$ diperoleh $x_1 \cdot x_2 = 0$. □

DIAGONALISASI SATUAN

Definisi 11 [2] *Suatu matriks persegi A dengan entri-entri bilangan kompleks disebut dapat didiagonalkan secara satuan jika ada matriks satuan P sedemikian sehingga* $P^{-1}AP = P^*AP = D$ *dengan D adalah matriks diagonal dan matriks P dikatakan mendiagonalkan A secara satuan.*

Teorema 12 [2] *Jika A adalah suatu matriks persegi dengan entri-entri kompleks, maka yang berikut ini ekuivalen:*

(a). *A dapat didiagonalkan secara satuan.*
(b). *A mempunyai suatu himpunan n vektor eigen yang ortonormal.*
(c). *A adalah normal.*

Bukti:

(a) $\Rightarrow$ (b)

Karena A dianggap dapat didiagonalkan secara satuan, maka ada suatu matriks P yang dapat dibalik atau dikonjugatkan dari A dimana:

$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \cdots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & \cdots & P_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ P_{n1} & P_{n2} & \cdots & P_{nn} \end{bmatrix}$. Sedemikian sehingga $P^{-1}AP = P^{*}AP = D$, dengan

$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$ adalah matriks diagonal.

n vektor kolom dari P adalah vektor eigen dari A karena P ortogonal, maka vektor-vektor kolom ini ortonormal, sehingga A mempunyai n vektor eigen yang ortonormal. □

(b) $\Rightarrow$ (a)

Dimisalkan A mempunyai n vektor eigen yang ortonormal, $P_1, P_2, \dots, P_n$. Matriks P dengan vektor eigen ini sebagai kolom mendiagonalkan A secara sama. Karena vektor eigen ini ortonormal, maka vektor P dapat dibalik atau merupakan konjugat *transpose* dari A. Jadi $P^{-1}AP = P^{*}AP = D$; dengan kata lain A dapat didiagonalkan secara satuan. □

(a) $\Rightarrow$ (c)

Pada bukti (a)⇒(b) ditunjukan bahwa suatu matriks A $n \times n$, yang dapat didiagonalkan secara satuan oleh suatu matriks P $n \times n$, yang kolom-kolomnya membentuk himpunan-himpunan ortonormal dari vektor-vektor eigen A. Anggap D adalah suatu matriks diagonal $D = P^{-1}AP = P^{*}AP$.

Sehingga $A = PDP^{-1} = PDP^{*}$ dengan demikian

$AA^{*} = (PDP^{*})(PDP^{*})^{*} = PDP^{*}PD^{*}P^{*} = PDID^{*}P^{*} = PDD^{*}P^{*} = PIP^{*} = I$ dan

$A^{*}A = (PDP^{*})^{*}(PDP^{*}) = PD^{*}P^{*}PDP^{*} = PD^{*}IDP^{*} = PD^{*}DP^{*} = PIP^{*} = I$

Jadi, A adalah Normal. □

LANGKAH-LANGKAH DIAGONALISASI SATUAN PADA MATRIKS KOMPLEKS

Suatu matriks kompleks yang didalamnya terdapat matriks Normal, hermit, hermit miring dan matriks satuan dapat didiagonalkan oleh sembarang matriks satuan yang vektor-vektor kolomnya adalah vektor-vektor basis ortonormal dari matriks kompleks tersebut. Langkah-langkah mendiagonalkan suatu matriks kompleks adalah sebagai berikut:

Dimisalkan matriks kompleks persegi A, langkah pertama menentukan persamaan karakteristik dari polinomial karakteristik $P(\lambda) = \det(\lambda I - A) = 0$. Selanjutnya mencari nilai eigen λ dari matriks A. Kemudian mencari vektor eigen $\boldsymbol{x}$ dengan mensubstitusikan nilai eigen ke Persamaan (4) dan dengan menggunakan eliminasi Gauss-Jordan diperoleh vektor eigennya. Selanjutnya membentuk vektor basis $\boldsymbol{u}$ untuk masing-masing vektor eigen $\boldsymbol{x}$ dari matriks A. Kemudian menerapkan proses Gram-Schmidt $P_n = \frac{\boldsymbol{u}_n}{\|\boldsymbol{u}_n\|}$ pada masing-masing vektor basis $\boldsymbol{u}$ sehingga diperoleh suatu basis ortonormal P_n untuk setiap ruang eigen yang berpadanan dengan nilai eigennya. Selanjutnya bentuk matriks satuan P yang kolom-kolomnya adalah vektor-vektor basis P_n yang ortonormal. Selanjutnya bentuk matriks P^{*} atau *transpose* konjugat dari matriks P. Kemudian periksa apakah matriks P yang terbentuk merupakan matriks satuan dengan menunjukkan $P^{*}P = I$. Jika ya maka selanjutnya lakukan diagonalisasi untuk memperoleh matriks diagonalnya dengan menghitung $P^{-1}AP = P^{*}AP = D$, dimana $D = diag(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ dan D adalah matriks diagonal yang terbentuk dari matriks A. Dengan kata lain matriks P mendiagonalkan matriks A secara satuan. Jika tidak matriks A tidak dapat didiagonalisasikan.

Contoh 13

Tentukan matriks diagonal dari matriks hermit berikut.

$A = \begin{bmatrix} 4 & 1-3i \\ 1+3i & 7 \end{bmatrix}$

Penyelesaian:

(i). Polinomial karakteristik dari matriks A.

$P(\lambda) = \det(\lambda I - A) = 0$

$\det\left[\lambda\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}4 & 1-3i\\ 1+3i & 7\end{bmatrix}\right] = 0$

$\det\left[\begin{bmatrix}\lambda-4 & -1+3i\\ -1-3i & \lambda-7\end{bmatrix}\right] = 0$

jadi persamaan karakteristik dari matriks A adalah

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 11\lambda + 18 = 0 \qquad (7)$$

(ii). Dengan memfaktorkan Persamaan (7) diperoleh nilai eigen dari A adalah $\lambda_1 = 2,$ dan $\lambda_2 = 9.$

(iii). Berdasarkan Persamaan (4) akan ditentukan vektor eigen dari matriks A.

Untuk $\lambda_1 = 2$ diperoleh

$\begin{bmatrix}-2 & -1+3i\\ -1-3i & -5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$

gunakan eliminasi Gauss-Jordan diperoleh $\begin{bmatrix}1 & \frac{1-3i}{2}\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$, $x_1 + \frac{1-3i}{2}x_2 = 0$

misalkan $x_2 = t,$ diperoleh $x_1 = \frac{-1+3i}{2}t$

sehingga vektor eigen dari matriks A yang berpadanan dengan $\lambda_1 = 2$ adalah vektor-vektor tak nol dalam $\mathbb{C}^2$ yang berbentuk

$\mathbf{x} = \begin{bmatrix}\frac{-1+3i}{2}t\\ t\end{bmatrix} = t\begin{bmatrix}\frac{-1+3i}{2}\\ 1\end{bmatrix}$ dengan ruang eigennya berdimensi 1.

Untuk $\lambda_2 = 9$ diperoleh

$\begin{bmatrix}5 & -1+3i\\ -1-3i & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$

gunakan eliminasi Gauss-Jordan diperoleh

$\begin{bmatrix}1 & \frac{-1+3i}{5}\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$, $x_1 + \frac{-1+3i}{5}x_2 = 0$

misalkan $x_2 = t,$ diperoleh $x_1 = \frac{1-3i}{5}t$

sehingga vektor eigen dari A yang berpadanan dengan $\lambda_2 = 9$ adalah vektor-vektor tak nol dalam $\mathbb{C}^2$ yang berbentuk

$\mathbf{x} = \begin{bmatrix}\frac{1-3i}{5}t\\ t\end{bmatrix} = t\begin{bmatrix}\frac{1-3i}{5}\\ 1\end{bmatrix}$ dengan ruang eigennya berdimensi 1.

(iv). Vektor basis yang terbentuk dari vektor eigen tersebut berturut-turut adalah

$\boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix}\frac{-1+3i}{2}\\ 1\end{bmatrix}$ dan $\boldsymbol{u}_2 = \begin{bmatrix}\frac{1-3i}{5}\\ 1\end{bmatrix}$.

(v). Terapkan proses gram-schmidt $P_n = \frac{\boldsymbol{u}_n}{\|\boldsymbol{u}_n\|}$ untuk menormalkan vektor-vektor basisnya.

Untuk $\boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix}\frac{-1+3i}{2}\\ 1\end{bmatrix}$. Karena $\|\boldsymbol{u}_1\| = \sqrt{\left|\frac{-1+3i}{2}\right|^2 + |1|^2} = \sqrt{\frac{10}{4} + 1} = \sqrt{\frac{7}{2}}$

maka vektor basis $P_1 = \frac{\boldsymbol{u}_1}{\|\boldsymbol{u}_1\|} = \frac{\left[\frac{-1+3i}{2}, 1\right]}{\sqrt{\frac{7}{2}}} = \left[\frac{-1+3i}{2\sqrt{\frac{7}{2}}}, \frac{1}{\sqrt{\frac{7}{2}}}\right]$

adalah suatu basis ortonormal untuk ruang eigen yang berpadanan dengan $\lambda_1 = 2.$

Untuk $\boldsymbol{u}_2 = \begin{bmatrix}\frac{1-3i}{5}\\ 1\end{bmatrix}$. Karena $\|\boldsymbol{u}_2\| = \sqrt{\left|\frac{1-3i}{5}\right|^2 + |1|^2} = \sqrt{\frac{10}{25} + 1} = \frac{\sqrt{35}}{5}$

maka vektor basis $P_2 = \frac{\boldsymbol{u}_1}{\|\boldsymbol{u}_1\|} = \frac{\left[\frac{1-3i}{5}, 1\right]}{\frac{\sqrt{35}}{5}} = \left[\frac{1-3i}{\sqrt{35}}, \frac{5}{\sqrt{35}}\right]$

adalah suatu basis ortonormal untuk ruang eigen yang berpadanan dengan $\lambda_2 = 9$.

(vi). Bentuk matriks satuan P yang kolom-kolomnya adalah vektor-vektor basis seperti berikut.

$$P = [P_1 \vdots P_2] = \begin{bmatrix} \frac{-1+3i}{2\sqrt{\frac{7}{2}}} & \frac{1-3i}{\sqrt{35}} \\ \frac{1}{\sqrt{\frac{7}{2}}} & \frac{5}{\sqrt{35}} \end{bmatrix}$$

(vii). Membentuk *transpose* konjugat dari matriks P.

$$\bar{P} = \begin{bmatrix} \frac{-1-3i}{2\sqrt{\frac{7}{2}}} & \frac{1+3i}{\sqrt{35}} \\ \frac{1}{\sqrt{\frac{7}{2}}} & \frac{5}{\sqrt{35}} \end{bmatrix}, \bar{P}^T = P^* = \begin{bmatrix} \frac{-1-3i}{2\sqrt{\frac{7}{2}}} & \frac{1}{\sqrt{\frac{7}{2}}} \\ \frac{1+3i}{\sqrt{35}} & \frac{5}{\sqrt{35}} \end{bmatrix}$$

(viii). Periksa apakah matriks P merupakan matriks satuan.

Dengan menunjukkan $P^*P = I$ maka terbukti matriks P merupakan matriks satuan.

$$P^*P = \begin{bmatrix} \frac{-1-3i}{2\sqrt{\frac{7}{2}}} & \frac{1}{\sqrt{\frac{7}{2}}} \\ \frac{1+3i}{\sqrt{35}} & \frac{5}{\sqrt{35}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-1+3i}{2\sqrt{\frac{7}{2}}} & \frac{1-3i}{\sqrt{35}} \\ \frac{1}{\sqrt{\frac{7}{2}}} & \frac{5}{\sqrt{35}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(ix). Hitung $D = P^*AP$

$$D = \begin{bmatrix} \frac{-1-3i}{2\sqrt{\frac{7}{2}}} & \frac{1}{\sqrt{\frac{7}{2}}} \\ \frac{1+3i}{\sqrt{35}} & \frac{5}{\sqrt{35}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1-3i \\ 1+3i & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-1+3i}{2\sqrt{\frac{7}{2}}} & \frac{1-3i}{\sqrt{35}} \\ \frac{1}{\sqrt{\frac{7}{2}}} & \frac{5}{\sqrt{35}} \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}.$$

Jadi didapat matriks diagonal D dan terbukti matriks P mendiagonalkan matriks A secara satuan.

KESIMPULAN

Matriks kompleks A bisa didiagonalisasikan jika dan hanya jika terdapat matriks satuan P yang digunakan untuk mendiagonalkan matriks kompleksnya secara satuan. Langkah-langkah menentukan diagonalisasi matriks A adalah menentukan persamaan karakteristik dari polinomial karakteristik $P(\lambda) = \det(\lambda I - A) = 0$. Selanjutnya mencari nilai eigen λ dari matriks A. Kemudian mencari vektor eigen $\boldsymbol{x}$ dengan mensubstitusikan nilai eigen ke persamaan $(\lambda I - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, dan dengan menggunakan eliminasi Gauss-Jordan diperoleh vektor eigennya. Membentuk vektor basis $\boldsymbol{u}$ untuk masing-masing vektor eigen $\boldsymbol{x}$ dari matriks A. Menerapkan proses Gram-Schmidt $P_n = \frac{u_n}{\|u_n\|}$ pada masing-masing vektor basis $\boldsymbol{u}$ sehingga diperoleh suatu basis ortonormal P_n untuk setiap ruang eigen yang berpadanan dengan nilai eigennya. Bentuk matriks satuan P yang kolom-kolomnya adalah vektor-vektor basis P_n yang ortonormal. Bentuk matriks P^* atau *transpose* konjugat dari matriks P. Periksa apakah matriks P yang terbentuk merupakan matriks satuan dengan menunjukkan $P^*P = I$, jika ya maka selanjutnya lakukan diagonalisasi untuk memperoleh matriks diagonalnya dengan menghitung $P^{-1}AP = P^*AP = D$, D adalah matriks diagonal yang terbentuk dari matriks A, atau dengan kata lain matriks P mendiagonalkan matriks A secara satuan, jika tidak matriks A tidak dapat didiagonalisasikan.

DAFTAR PUSTAKA

[1]. Kreyszig, E. *Matematika Teknik Lanjutan*, Buku I Ed ke-6 [Sumantri, B. alih bahasa]. Jakarta: Gramedia Pustaka Utama; 1993.

[2]. Anton, H. *Dasar-dasar Aljabar Linear*, Jilid II, Syarifudin, Damayanti, M., Wulandari, Y. (ed), Tangerang: Binarupa Aksara; 2000.

[3]. Kinanti, F. Diagonalisasi Matriks n x n Atas Ring Komutatif Dengan Elemen Satuan, *Buletin Ilmiah Mat.Stat dan Terapannya*. 2013; 02(3):183-190.

[4]. Leon, S.J. *Aljabar Linear dan Aplikasinya*, Ed ke-5 [Bondan, A. alih bahasa]. Jakarta: Erlangga; 2001.

[5]. Tasari, Sifat-sifat Matriks Uniter, Matriks Normal, dan Matriks Hermitian, *Magistra*. XXV Mar 2013; (83) Th.

[6]. Zhang, F. *Matrix Theory Basic Result And Techniques*, Ed ke-2, New York: Springer New York Dordrecht Heidelberg London; 2011.

HERONIMUS HENGKI : Jurusan Matematika FMIPA Untan Pontianak, heronimus.hengki@gmail.com

HELMI : Jurusan Matematika FMIPA Untan Pontianak, helmi132205@yahoo.co.id

MARIATUL KIFTIAH : Jurusan Matematika FMIPA Untan Pontianak, kiftiahmariatul@ymail.com