Buletin Ilmiah Math. Stat. dan Terapannya (Bimaster)
Volume 02, No. 1(2013), hal 1-6.

PENYELESAIAN PERSAMAAN GELOMBANG DENGAN METODE *D'ALEMBERT*

Demang, Helmi, Evi Noviani

INTISARI

Permasalahan di bidang teknik dan fisika dapat dimodelkan ke dalam bentuk persamaan diferensial parsial, seperti masalah fluida, transfer panas, teori elektromagnetik, dan perambatan gelombang. Penelitian ini mengkaji terbentuknya persamaan gelombang dan mencari penyelesaian persamaan gelombang dengan metode D'alembert. Bentuk umum persamaan gelombang yaitu:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Penyelesaian persamaan gelombang dengan metode D'alembert dilakukan dengan cara mengenalkan variabel bebas baru, kemudian variabel bebas tersebut diturunkan sehingga terbentuk penyelesaian persamaan gelombang. Dengan mensubstitusikan nilai awal diperoleh persamaan khusus dari persamaan gelombang yang disebut sebagai penyelesaian D'alembert yaitu:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[f(x+ct) + f(x-ct)] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)ds$$

.

Kata Kunci : *Metode D'alembert, Persamaan* Diferensial *Parsial, Persamaan Gelombang.*

PENDAHULUAN

Persamaan diferensial merupakan ilmu matematika yang dapat digunakan untuk menjelaskan masalah-masalah fisis. Masalah fisis merupakan masalah yang berkaitan dengan hukum alam, yang dibahas dalam ilmu fisika. Masalah fisis tersebut dapat dipahami sebab akibatnya apabila dibentuk dalam model persamaan diferensial. Namun hanya sistem fisis sederhana saja yang bisa dimodelkan dalam persamaan diferensial biasa. Berbagai bidang fisis lainnya yang harus dimodelkan dalam persamaan diferensial parsial seperti masalah fluida, transfer panas, teori elektromagnetik, maupun perambatan gelombang dapat dilihat pada [1]. Salah satu masalah fisis yang sering dijumpai dalam kehidupan sehari-hari yaitu masalah gelombang. Ada berbagai macam masalah gelombang diantaranya masalah gelombang pada senar, serta masalah gelombang pada membran. Penyelesaian permasalahan tersebut dapat dilakukan dengan berbagai metode. Permasalahan gelombang pada senar misalnya dapat diselesaikan dengan metode yang berbeda seperti: Transformasi *Fourier*, Transformasi *Laplace* maupun Pemisahan Variabel. Namun ada sebuah metode yang dikenalkan oleh Jean Le Rond *D'alembert* seorang matematikawan dari Prancis, dimana metode tersebut lebih dikenal dengan Metode *D'alembert.* Dalam metodenya digunakan variabel bebas baru yang merupakan karakteristik dari persamaan diferensial parsial. Sehingga dengan adanya variabel bebas baru ini mempermudah mencari penyelesaian persamaan diferensial parsial.

Adapun tujuan dari penulisan ini adalah mengkaji terbentuknya persamaan gelombang dan selanjutnya diselesaikan dengan metode *D'alembert.* Pada penelitian ini masalah dibatasi pada penyelesaian persamaan gelombang pada senar homogen yang kedua ujungnya terikat.

Adapun langkah-langkah penelitian ini yaitu: pertama menentukan asumsi-asumsi yang berlaku dalam gelombang pada senar, kemudian dengan menggunakan asumsi-asumsi tersebut dibentuk model persamaan gelombang. Sebelum masuk dalam proses pengerjaan dengan metode *D'alembert,* terlebih dahulu mencari nilai karakteristik. Selanjutnya dengan menggunakan metode *D'alembert* dikenalkan variabel bebas baru, dimana variabel tersebut merupakan karakteristik dari persamaan gelombang.

Selanjutnya dicari persamaan gelombang dalam bentuk variabel bebas baru tersebut dengan menurunkan variabel tersebut menggunakan aturan rantai, dilanjutkan dengan integrasi diperoleh penyelesaian umum persamaan gelombang. Setelah diperoleh penyelesaian umum disubstitusikan nilai awal sehingga diperoleh penyelesaian khusus yang disebut sebagai penyelesaian *D'alembert.*

PERSAMAAN GELOMBANG DENGAN METODE *D'ALEMBERT*

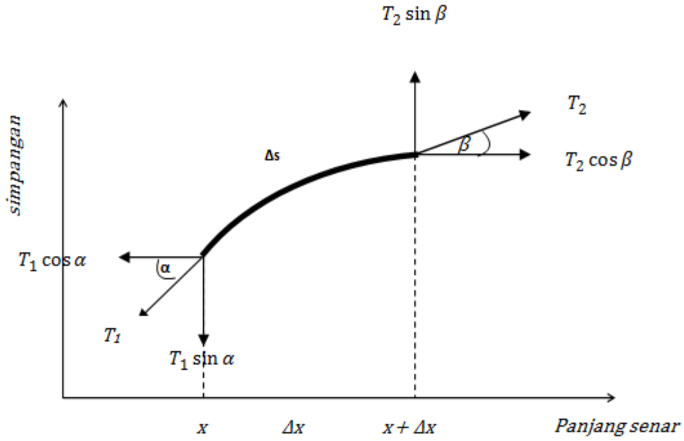
Metode *D'alembert* merupakan metode yang digunakan oleh Jean Le Rond D'alembert (1717-1783) dalam menyelesaikan persamaan gelombang. Dalam metodenya, digunakan variabel bebas baru yang diperoleh dari karakteristik persamaan diferensial parsial. Sebelum diperoleh variabel bebas baru, terlebih dahulu nilai/akar-akar penyelesaian pada Persamaan Diferensial Parsial (PDP) ditransformasikan. Hasil tranformasi PDP dalam ξ, η disebut bentuk kanonik (standar) dari PDP. Berikut aturan yang digunakan pada transformasi PDP kedalam bentuk kanonik [2]:

1. Jika akar-akar penyelesaian dari PDP adalah dua akar real maka digunakan $\xi(x, y)$ dan $\eta(x, y)$ sebagai dua koordinat pada bidang x, y, nilai $\xi(x, y)$ dan $\eta(x, y)$ diperoleh dari integrasi dari dua penyelesaian real tersebut.
2. Jika akar-akar penyelesaiannya adalah akar pasangan kompleks maka digunakan $\xi(x, y)$ dan $\eta(x, y)$ yang diperoleh dari bagian real dan imajiner pada pasangan kompleks tersebut.
3. Jika akar-akar penyelesaiannya merupakan satu akar real kembar digunakan $\xi(x, y)$, sedangkan untuk $\eta(x, y)$ dipilih untuk nilai yang lain. Pemilihan nilai $\eta(x, y)$ diusahakan mempermudah pekerjaan. Sebagai contoh, jika $\xi = x + y$ selanjutnya dipilih $\eta = x + y$.

Dalam mengkaji terbentuknya persamaan gelombang, pengamatan dilakukan pada sebuah senar yang panjangnya dimisalkan L, kedua ujung senar diikat dan dipasang dengan tegangan T. Sebelum menyelesaikan persamaan gelombang, terlebih dahulu diasumsikan bahwa [3]:

1. Senar homogen sehingga massa senar setiap titik sepanjang senar adalah sama/konstan. Senar yang homogen diharapkan defleksi senar yang sempurna dan mulus.
2. Tegangan pada senar lebih besar dibandingkan gaya gravitasi bumi, sehingga gaya grafitasi dapat diabaikan. Jika gaya gravitasi bumi lebih besar dari tegangan senar, maka senar tidak dapat bergetar karena kendur, sehingga tidak dapat bergetar dengan baik.
3. Penampang senar sangat kecil sehingga volume senar sebanding dengan panjang senar itu sendiri. Dengan adanya asumsi ini mempermudah perhitungan.
4. Gerakan gelombang senar hanya pada arah vertikal. Asumsi ini menegaskan bahwa tidak ada gerakan pada arah horizontal, ini disebabkan kedua ujung senar yang terikat.

Berikut pengamatan pada sebuah partisi senar pada waktu t tertentu, seperti yang terlihat pada Gambar 1 yang dijabarkan gaya-gaya yang bekerja pada bagian senar tersebut.



Gambar 1 Gaya-gaya yang bekerja pada bagian Senar [3]

Misalkan $u(x,t)$ menyatakan besarnya simpangan dari posisi setimbang pada titik x dan pada waktu t serta T_1 dan T_2 adalah tegangan di kedua titik ujung dari bagian kecil tersebut. Karena tidak ada gerak dalam arah horisontal, berarti komponen horisontal tegangan ini konstan atau dapat ditulis sebagai:

$$T_1 \cos\alpha = T_2 \cos\beta = T = konstan \tag{1}$$

Pada arah vertikal terdapat dua gaya, yaitu komponen vertikal $-T_1 \sin\alpha$ dari T_1 dan $T_2 \sin\beta$ dari T_2, tanda minus disini berarti bahwa komponen tersebut mengarah ke bawah. Berdasarkan asumsi ketiga $(V \approx \Delta x)$ maka besarnya massa senar (m) adalah hasil kali antara massa jenis senar (ρ) dengan panjang penampang senar (Δx) atau dirumuskan menjadi.

$$m = \rho.\Delta x$$

Menurut Hukum II Newton, resultan gaya sama dengan massa $(\rho\,\Delta x)$ dikali percepatannya, yang dihitung pada suatu titik di daerah x dan $x + \Delta x$.

$$T_2 \sin\beta - T_1 \sin\alpha = \rho\,\Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{2}$$

dari Persamaan (2) dan Persamaan (1) diperoleh

$$\frac{T_2 \sin\beta}{T_2 \cos\beta} - \frac{T_1 \sin\alpha}{T_1 \cos\alpha} = \frac{\rho\,\Delta x}{T}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$\tan\beta - tan\,\alpha = \frac{\rho\,\Delta x}{T}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{3}$$

Nilai $\tan\alpha$ merupakan kemiringan kurva senar di titik x dan $\tan\beta$ merupakan kemiringan kurva senar di titik $x + \Delta x$, dapat ditulis dengan:

$$\tan\alpha = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_x \; dan \; \tan\beta = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x+\Delta x}$$

Pembagian Persamaan (3) dengan Δx menghasilkan:

$$\frac{1}{\Delta x}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x+\Delta x} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_x\right] = \frac{\rho}{T}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

jika Δx mendekati nol, diperoleh

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x+\Delta x} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_x\right] = \frac{\rho}{T}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Sehingga dapat dituliskan

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{T}{\rho}\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

karena T menyatakan tegangan yang selalu bernilai positif dan ρ menyatakan massa jenis yang bernilai positif, maka diambil $c^2 = \frac{T}{\rho}$ untuk menunjukkan bahwa nilai tersebut selalu bernilai positif, sehingga dapat ditulis sebagai

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{4}$$

Persamaan (4) adalah persamaan gelombang yang berbentuk persamaan diferensial parsial orde dua [3].

PENYELESAIAN PERSAMAAN GELOMBANG DENGAN METODE *D'ALEMBERT*

Dari hasil pemodelan persamaan gelombang dapat ditulis sebagai:

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \tag{5}$$

untuk memperoleh nilai awal, ada dua kondisi yang berlaku yaitu simpangan awal dan kecepatan awal senar bervibrasi. Dengan memisalkan $f(x)$ sebagai simpangan awal dan $g(x)$ sebagai kecepatan awal, maka kondisi awal pada persamaan gelombang dapat ditulis sebagai:

$$u(x,0) = f(x)$$

$$u_t(x,0) = g(x) \tag{6}$$

Sebelum pengerjaan dengan metode *D'alembert*, terlebih dahulu dicari nilai karakteristik untuk persamaan gelombang, nilai karakteristik ini dalam metode *D'alembert* digunakan sebagai variabel baru.

Selanjutnya Persamaan (5) dibentuk ke dalam persamaan umum PDP orde dua, dengan memisalkan $y = ct$, maka $y_t = c$ dengan menggunakan aturan rantai maka:

$$\begin{aligned} u_t &= u_y . y_t \\ &= cu_y \\ u_{tt} &= (u_t)_y . y_t \\ &= (cu_y)_y . c \\ &= c^2 u_{yy} \end{aligned}$$

Substitusikan nilai u_{tt} ke Persamaan (5) diperoleh:

$$c^2 u_{yy} = c^2 u_{xx}$$

atau dapat ditulis menjadi

$$u_{xx} - u_{yy} = 0 \tag{7}$$

dari Persamaan $Ru_{xx} + 2Su_{xy} + Tu_{yy} = f$, maka pada Persamaan (7) nilai dari $R = 1$, $S = 0$, dan $T = -1$, selanjutnya nilai tersebut disubstitusikan ke persamaan [2]

$$\frac{dy}{dx} = \frac{S \pm \sqrt{S^2 - RT}}{R}$$

diperoleh

$$\frac{dy}{dx} = \pm 1$$

dengan demikian Persamaan (7) memiliki dua akar real yaitu $\frac{dy}{dx} = 1$ atau $\frac{dy}{dx} = -1$, ini berarti $dy = -dx$ atau $dy = dx$. Dengan mengintegralkan kedua nilai akar-akar penyelesaian tersebut, maka diperoleh dua nilai karakteristik yaitu:

$$x + ct = c_1 \text{ dan } x - ct = c_2 \tag{8}$$

karakteristik inilah yang selanjutnya digunakan dalam metode *D'alembert* sebagai variabel bebas baru [3]. Dari Persamaan (8) dapat dituliskan variabel bebas baru yaitu [3]:

$$\xi = x + ct \tag{9}$$

$$\eta = x - ct \tag{10}$$

Persamaan (9) dan Persamaan (10) diturunkan terhadap x diperoleh:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x + ct) = 1$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x - ct) = 1$$

dengan menggunakan aturan rantai, karena $u(x,t)$ suatu fungsi dari ξ dan η, maka diperoleh:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \tag{11}$$

Turunan dari Persamaan (9) dan Persamaan (10) terhadap *t* adalah [4]

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(x + ct) = c$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(x - ct) = -c$$

Selanjutnya dengan menggunakan aturan rantai, diperoleh:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \right) \tag{12}$$

Substitusikan Persamaan (11) dan Persamaan (12) ke Persamaan (5), diperoleh:

$$c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \right) = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \right)$$

$$4c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$$

berdasarkan asumsi kedua bahwa $T \neq 0$ maka $c^{\,2} \neq 0$, dengan demikian dapat diambil

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \tag{13}$$

lalu mengintegralkan Persamaan (13) terhadap η,

$$\int \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\, d\eta = \int 0\, d\eta$$

ruas kiri diperoleh $\frac{\partial u}{\partial \xi}$ dan ruas kanan diperoleh suatu fungsi yang tidak memuat η misalkan fungsi tersebut $h(\xi)$, maka hasil integrasi persaman (13) terhadap η diperoleh:

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = h(\xi) \tag{14}$$

dengan $h(\xi)$ adalah suatu fungsi dari ξ. Selanjutnya mengintegralkan persamaan (14) terhadap ξ,

$$\int \frac{\partial u}{\partial \xi} d\xi = \int h(\xi)$$

diperoleh:

$$u = \int h(\xi) d\xi + \Psi(\eta) \tag{15}$$

dengan $\Psi(\eta)$ adalah fungsi dari η. Jika hasil integrasi $h(\xi)$ terhadap ξ dimisalkan $\Phi(\xi)$ maka Persaman (15) dapat ditulis menjadi:

$$u = \Phi(\xi) + \Psi(\eta) \tag{16}$$

Substitusikan nilai ξ pada Persamaan (9) dan nilai η pada Persamaan (10) ke Persamaan (16) diperoleh persamaan umum sebagai berikut:

$$u(x,t) = \Phi(x + ct) + \Psi(x - ct) \tag{17}$$

Persamaan (17) diturunkan terhadap t maka diperoleh:

$$u_t(x,t) = c\Phi^{'}(x + ct) - c\Psi^{'}(x - ct) \tag{18}$$

untuk memperoleh penyelesaian khusus, maka harus mengikuti kondisi awal pada Persamaan (6), yaitu dengan memasukkan nilai $t = 0$ menjadi:

$$u(x,0) = f(x) = \Phi(x) + \Psi(x) \tag{19}$$

$$u_t(x,0) = g(x) = c\Phi^{'}(x) - c\Psi^{'}(x) \tag{20}$$

Selanjutnya Persamaan (20) diintegralkan terhadap x diperoleh

$$\Phi(x) - \Psi(x) = \frac{1}{c}\int_0^x g(s)ds + K \tag{21}$$

dengan K sebarang konstanta.

Dengan mengeliminasikan Persamaan (19) dengan Persamaan (21) diperoleh:

$$\Phi(x) = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2c}\int_0^x g(s)ds + K$$

Selanjutnya dicari nilai $\Psi(x)$, diperoleh:

$$\Psi(x) = \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2c}\int_0^x g(s)ds - K$$

kemudian, substitusikan nilai $\Phi(x)$ dan $\Psi(x)$ ke dalam Persamaan (17), sebagai berikut:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}f(x+ct) + \frac{1}{2c}\int_0^{x+ct} g(s)ds + K + \frac{1}{2}f(x-ct) - \frac{1}{2c}\int_0^{x-ct} g(s)ds - K$$

diperoleh:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[f(x+ct) + f(x-ct)] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)ds \qquad (22)$$

Persamaan (22) merupakan penyelesaian khusus dari persamaan gelombang, biasa disebut sebagai penyelesaian *D'alembert*.

PENUTUP

Metode *D'alembert* merupakan metode yang tepat untuk menyelesaikan persamaan gelombang, karena penentuan karakteristik dari persamaan gelombang mudah diperoleh, walaupun demikian metode ini jarang digunakan dalam menyelesaikan persamaan diferensial parsial yang lain. Oleh karena itu diperlukan penelitian lebih lanjut mengenai metode *D'alembert*, sehingga dapat digunakan dalam penyelesaian persamaan diferensial secara umum.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Waluya B. *Persamaan Diferensial.* Semarang: Universitas Negeri Semarang; 2006.

[2] Kreyszig, E. *Advanced Engineering Mathematics.* Singapore: 9^{th} ed. John Wiley & Sons, Inc; 2006.

[3] Gibbon J.D. *1^{st} and 2^{nd} order PDEs.* United Kingdom: Dep of Mathematics; 2011.

[4] Tung, K.K. *Partial Differential Equations and Fourier Analysis-A Short Introduction.* Washington.

Demang : Jurusan Matematika FMIPA UNTAN, Pontianak, esas_gayamu_46@yahoo.com
Helmi : Jurusan Matematika FMIPA UNTAN, Pontianak, helmi132205@yahoo.co.id
Evi Noviani : Jurusan Matematika FMIPA UNTAN, Pontianak, noani84@yahoo.com