Model Sederhana Gerak Osilator dengan Massa Berubah Terhadap Waktu Menggunakan Metode Runge Kutta

Yulia Acu^a, Boni Pahlanop Lapanporo^{a*}, Arie Antasari Kushadiwijanto^a

^aJurusan Fisika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Tanjungpura

Jalan Prof. Dr. Hadari Nawawi, Pontianak, Indonesia

*Email : boni8poro@physic.untan.ac.id

Abstrak

Persamaan gerak osilasi pegas dengan massa berubah terhadap waktu merupakan persamaan differensial non linear yang sulit diselesaikan secara analitik. Pada penelitian ini persamaan gerak osilasi tersebut diselesaikan menggunakan metode Runge Kutta orde empat dan Runge Kutta *Fehlberg* tingkat lima. Metode Runge Kutta menawarkan penyelesaian persamaan diferensial dengan pertumbuhan *truncation error* yang jauh lebih kecil. Hasilnya menunjukkan gerak osilator dengan massa yang terus berkurang terhadap waktu memiliki sifat seperti osilator teredam dan menjadi gerak harmonik sederhana saat massa osilator tetap. Metode Runge Kutta orde empat dan Runge Kutta *Fehlberg* mampu menggambarkan keadaan sistem osilator dengan massa berubah terhadap waktu.

Kata Kunci : Gerak Osilasi, Runge Kutta, Persamaan Diferensial

1. Latar Belakang

Getaran atau osilasi merupakan gerak bolak balik suatu benda pada suatu lintasan yang memiliki suatu posisi kesetimbangan. Gerak harmonik sederhana mempunyai persamaan gerak dalam bentuk sinusoidal dan digunakan untuk menganalisis suatu gerak periodik tertentu.

Pitrianto (2008) telah mengkaji tentang gerak pegas dan gerak bandul matematis menggunakan metode Runge Kutta orde empat. Dalam kajian tersebut massa yang digunakan merupakan massa konstan [1]. Hasil yang diperoleh menggunakan metode numerik memiliki nilai yang tidak jauh berbeda dengan solusi analitik yakni dengan kisaran $error \pm 1\%$. Kemudian Rodrigues, dkk. (2014) mengkaji tentang gerak osilator sederhana dengan massa yang berubah-ubah terhadap waktu menggunakan metode Euler [2]. Dalam model tersebut diasumsikan bahwa massa yang menggantung pada pegas merupakan massa fluida yang akan terus berkurang terhadap waktu. Hukum II Newton tidak dapat secara langsung diaplikasikan dalam kasus tersebut karena hukum II Newton hanya berlaku jika sistem memiliki massa yang konstan (tidak berubah terhadap waktu). Dari sistem osilator tersebut diperoleh persamaan diferensial non linier yang sulit diselesaikan secara analitik.

Dalam penelitian ini model gerak pegas dengan massa berubah terhadap waktu disimulasikan kembali secara numerik menggunakan metode Runge Kutta orde empat dan metode Runge Kutta *Fehlberg* tingkat lima. Metode Runge Kutta merupakan alternatif lain

dari metode Deret Taylor yang tidak memerlukan perhitungan turunan [3]. Metode Runge Kutta orde empat dan Runge Kutta *Fehlberg* ini menawarkan penyelesaian persamaan diferensial dengan pertumbuhan *truncation error* yang jauh lebih kecil dan tingkatan evaluasi fungsi yang lebih banyak jika dibandingkan dengan metode Euler.

2. Gerak Osilasi Pegas

Pada diferensial yang mewakili sistem fisis adakalanya memiliki bentuk yang khas sehingga memiliki solusi analitik yang khas. Namun, banyak di antaranya tidak bisa diselesaikan dengan teknik penyelesaian secara analitik [4].

Gerak getaran pada pegas merupakan salah satu contoh gerak harmonik yang sering terjadi dalam kehidupan sehari-hari. Gaya gravitasi bumi, gaya tarik pegas, gaya gesek dan gaya luar merupakan gaya yang akan mempengaruhi gerak getaran pada pegas [5]. Pemodelan pegas dengan massa yang berubah-ubah terhadap waktu menggunakan ilustrasi massa pegas yaitu ember yang diisi dengan air. Air akan mengalir melalui lubang kecil pada bagian dasar ember seperti telah diilustrasikan pada Gambar 1. Pada penelitian ini diasumsikan bahwa hilangnya massa air dan gerak osilator terjadi sepanjang sumbu-z. Dalam sistem pegas pada Gambar 1 gesekan dapat diabaikan. Sistem akan dikenakan tiga gaya yang berbeda, yaitu gaya elastis yang diberikan oleh pegas, gaya berat osilator, dan gaya tekanan yang diberikan oleh air yang mengalir melalui lubang pada dasar ember. Perilaku dinamik sistem diatur pada persamaan (1) sebagai berikut [2]

$$m\dot{v} = -\frac{dm}{dt}(w-v) - kz - mg \quad (1)$$

Gambar 1. Pegas dengan massa berubah. Sebuah ember berisi air yang digantungkan pada pegas. Air akan mengalir melalui lubang kecil pada bagian bawah ember [2]

Pada persamaan (1) $z(t)$ adalah perpindahan pusat massa yang diukur dari posisi awal keseimbangan; w adalah kecepatan rata-rata air meninggalkan sistem; $v = \dot{z}$ adalah kecepatan osilator; k adalah konstanta pegas; dan g percepatan gravitasi.

Untuk kondisi $m=w=0$, $\frac{dm}{dt} = 0$, dan $\dot{v} = 0$, pada waktu $t=0$, untuk menentukan posisi titik kesetimbangan (*the initial equilibrium position*)

$$z_0 = -\frac{m_0 g}{k} \quad (2)$$

Pada persamaan (2) m_0 adalah massa awal osilator yaitu massa ember dengan massa awal air. Jika m konstan, sistem akan berosilasi di sekitar z_0 posisi keseimbangan.

Persamaan untuk menghitung massa air yang terus berkurang terhadap waktu (Massa air memiliki ketergantungan kuadrat pada waktu) [2]:

$$m_w(t) = m_{w(0)} \left(1 - ft \sqrt{\frac{g}{2h_0}} \right)^2 \quad (3)$$

Pada persamaan (3) $m_{w(0)}$ merupakan massa awal air; $f = \frac{a}{A}$ adalah rasio antara luas penampang lubang (a) dengan luas penampang

dasar ember (A); dan h_0 adalah awal tinggi kolom air. Massa osilator merupakan jumlah massa ember m_b dan massa air yang bervariasi terhadap waktu $m_w(t)$.

Dengan asumsi bocornya air terjadi pada tingkat yang sangat rendah. Persamaan sistem gerak pegas diatur pada persamaan (4) sebagai berikut

$$\dot{v} = -\frac{k}{m_b + m_w} z - g \quad (4)$$

Ember akan benar-benar kosong dalam waktu tertentu yang diberikan pada persamaan (5) sebagai berikut

$$\tau = \frac{1}{f} \sqrt{\frac{2h_0}{g}} \quad (5)$$

Setelah waktu berlalu τ pada saat air dalam ember habis, maka osilasi akan diatur oleh persamaan (6) sebagai berikut

$$\dot{v} = -\frac{k}{m_b} z - g, \quad t \geq \tau \quad (6)$$

Energi kinetik sistem pegas vertikal dengan massa yang hilang diberikan oleh persamaan (7) sebagai berikut

$$T = \frac{mv^2}{2} \quad (7)$$

Kemudian untuk menghitung Energi potensial elastisitas diatur pada persamaan (8) sebagai berikut

$$U_e = \frac{kz^2}{2} \quad (8)$$

Serta energi potensial gravitasi diatur pada persamaan (9) sebagai berikut

$$U = mg(z - z_0) \quad (9)$$

Dan untuk menghitung energi total sistem dihitung dengan menjumlahkan semua Energi yang bekerja pada sistem seperti diatur pada persamaan (10) sebagai berikut

$$E = T + U_e + U \quad (10)$$

3. Metodologi

3.1 Setting Model

Dalam penyelesaian kasus gerak pegas dengan massa berubah terhadap waktu, nilai variabel masukan adalah massa awal air (m_w) = 10 kg yang akan terus berkurang seiring dengan berjalannya waktu. Massa ember (m_b) = 1 kg, percepatan gravitasi bumi (g) = 9,81 m/s², konstanta pegas (k) = 100 N/m, ketinggian air (h_0) = 0,5 m, kecepatan awal (v_0) = 0 m/s, dan simpangan awal (z_0) = -1,0791 m. Rasio (f) antara luas penampang lubang (a) dengan luas penampang permukaan air (A) adalah 0,01. Nilai

$h = 0,05$ s merupakan jarak antar waktu (*the time step size*).

3.2 Metode Euler

Metode Euler merupakan metode yang paling sederhana dan yang paling kurang teliti jika dibandingkan dengan metode lainnya [6]. Metode Euler yang akan digunakan untuk menyelesaikan persamaan (4) diatur pada persamaan (11) sebagai berikut [2]

$$v_{i+1} = v_i - h \left(\frac{k}{m_b + m_{w(t)}} z(t_i) + g \right) \quad (11)$$

Persamaan (11) digunakan untuk menghitung kecepatan sistem. Untuk mengetahui posisi sistem diatur pada persamaan (12) sebagai berikut [2]

$$z_{i+1} = z_i + hv_i \quad (12)$$

3.3 Metode Runge Kutta

Metode Runge Kutta pertama kali dikembangkan oleh Carl Runge dan Wiliam Kutta dalam rangka meniru hasil dari pendekatan deret Taylor tanpa harus melakukan diferensial analitik secara berulang. Metode Runge Kutta merupakan metode yang memberikan ketelitian hasil yang lebih baik dan tidak memerlukan turunan dari fungsi. Metode Runge Kutta Orde empat sering digunakan karena memiliki ketelitian yang lebih tinggi [6]. Untuk menyelesaikan persamaan gerak menggunakan metode runge kutta maka persamaan (5) diubah menjadi persamaan diferensial orde satu seperti pada persamaan (13) dan persamaan (14) sebagai berikut

$$\frac{dz}{dt} = f(v) = v(t) \quad (13)$$

$$\frac{dv}{dt} = g(z) = -\frac{k}{m_b + m_{w(t)}} z(t_i) - g \quad (14)$$

Metode Runge Kutta Orde empat yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan (4) diatur pada persamaan (15) sebagai berikut

$$z_{i+1} = z_i + \frac{h}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (15)$$

Persamaan (15) digunakan untuk menghitung posisi sistem. Sedangkan untuk menghitung kecepatan sistem diatur pada persamaan (16) sebagai berikut

$$v_{i+1} = v_i + \frac{h}{6} (l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4) \quad (16)$$

Dengan k dan l merupakan evaluasi fungsi yang diatur pada persamaan (17) dan persamaan (18) sebagai berikut

$$\begin{aligned} k_1 &= f(v) \\ k_2 &= f\left(v + \frac{h}{2} l_1\right) \\ k_3 &= f\left(v + \frac{h}{2} l_2\right) \\ k_4 &= f(v + hl_3) \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} l_1 &= g(z) \\ l_2 &= g\left(z + \frac{h}{2} k_1\right) \\ l_3 &= g\left(z + \frac{h}{2} k_2\right) \\ l_4 &= g(z + hk_3) \end{aligned} \quad (18)$$

Metode Runge Kutta *Fehlberg* tingkat lima merupakan metode Runge Kutta yang memiliki enam evaluasi fungsi. Metode ini menghasilkan nilai hampiran yang mendekati nilai penyelesaian analitik [7]. Metode Runge Kutta *Fehlberg* yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan (4) diatur pada persamaan (19) sebagai berikut

$$\begin{aligned} z_{i+1} = z_i + &\left(\frac{16}{135} hk_1 + \frac{6656}{12825} hk_3 + \frac{28561}{56430} hk_4 \right) \\ &+ \left(-\frac{9}{50} hk_5 + \frac{2}{55} hk_6 \right) \end{aligned} \quad (19)$$

Persamaan (19) digunakan untuk menghitung posisi sistem. Untuk menghitung kecepatan sistem diatur pada persamaan (20) sebagai berikut

$$\begin{aligned} v_{i+1} = v_i + &\left(\frac{16}{135} hl_1 + \frac{6656}{12825} hl_3 + \frac{28561}{56430} hl_4 \right) \\ &+ \left(-\frac{9}{50} hl_5 + \frac{2}{55} hl_6 \right) \end{aligned} \quad (20)$$

dengan k dan l merupakan evaluasi fungsi yang diatur pada persamaan (21) dan persamaan (22) sebagai berikut

$$\begin{aligned} k_1 &= f(v) \\ k_2 &= f\left(v + \frac{hl_1}{4}\right) \\ k_3 &= f\left(v + \frac{3}{32}hl_1 + \frac{9}{32}hl_2\right) \\ k_4 &= f\left(v + \frac{1932}{2197}hl_1 - \frac{7200}{2197}hl_2 + \frac{7296}{2197}hl_3\right) \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} k_5 &= f\left(v + \frac{439}{216}hl_1 - 8hl_2 + \frac{3680}{513}hl_3 - \frac{845}{4104}hl_4\right) \\ k_6 &= f\left(v - \frac{8}{27}hl_1 + 2hl_2 - \frac{3544}{2565}hl_3 + \frac{1859}{4104}hl_4 - \frac{11}{40}hl_5\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l_1 &= g(z) \\ l_2 &= g\left(z + \frac{1}{4}hk_1\right) \\ l_3 &= g\left(z + \frac{3}{32}hk_1 + \frac{9}{32}hk_2\right) \\ l_4 &= g\left(z + \frac{1932}{2197}hk_1 - \frac{7200}{2197}hk_2 + \frac{7296}{2197}hk_3\right) \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} l_5 &= g\left(z + \frac{439}{216}hk_1 - 8hk_2 + \frac{3680}{513}hk_3 - \frac{845}{4104}hk_4\right) \\ l_6 &= g\left(z - \frac{8}{27}hk_1 + 2hk_2 - \frac{3544}{2565}hk_3 + \frac{1859}{4104}hk_4 - \frac{11}{40}hk_5\right) \end{aligned}$$

4. Hasil dan Pembahasan

Berdasarkan Gambar 2 dapat dilihat bahwa amplitudo sistem mengalami penurunan seiring dengan berkurangnya massa. Frekuensi sistem getaran semakin bertambah.

Gambar 2. Posisi terhadap waktu

Sistem akan berosilasi dengan amplitudo dan frekuensi getaran yang konstan saat air dalam sistem habis. Sistem osilator dengan massa yang berkurang terhadap waktu, memiliki perilaku seperti sistem osilator teredam, dan akan menjadi gerak harmonik sederhana.

Gambar 3. Posisi terhadap waktu pada detik 30 s sampai 40 s

Gambar 3 menunjukkan bahwa osilasi yang terjadi pada metode Euler terjadi lebih cepat dari pada metode Runge kutta. Hal ini disebabkan proses perhitungan metode Euler yang lebih sederhana. Metode Euler hanya menggunakan dua evaluasi fungsi, sedangkan metode Runge Kutta orde empat memiliki empat evaluasi fungsi, dan metode Runge Kutta *Fehlberg* memiliki enam evaluasi fungsi. Air dalam ember akan habis pada waktu 31,93 s. Pada waktu tersebut semua metode mulai menunjukkan gerak harmonik sederhana.

Gambar 4. Selisih solusi antara metode pada posisi

Pada Gambar 4 dapat dilihat bahwa selisih solusi antara metode pada posisi sangat kecil. Untuk RSME (*Root Mean Square Error*) antara metode Runge Kutta orde empat dengan Euler sebesar 0,006708 dan metode Runge Kutta *Fehlberg* dengan Euler sebesar 0,006647. RMSE antara metode Runge Kutta *Fehlberg* dengan metode Runge Kutta orde empat sebesar 0,000213. Berdasarkan Gambar 4 terlihat bahwa semakin lama, selisih solusi antara metode semakin besar. Hal ini disebabkan kesalahan pembulatan pada metode dalam perhitungan. Besar kesalahan pembulatan data pada data sebelumnya akan mempengaruhi data selanjutnya.

Gambar 5. Kecepatan terhadap waktu

Gambar 6. Kecepatan terhadap waktu pada detik 30 s sampai 40 s

Gambar 7. Percepatan terhadap waktu

Pada Gambar 5 dan Gambar 7 dapat dilihat bahwa kecepatan dan percepatan sistem akan terus bertambah dan akan konstan pada saat air dalam sistem habis. Berdasarkan persamaan (4) semakin kecil massa yang mempengaruhi suatu sistem maka akan semakin besar pula percepatan suatu sistem tersebut. Berdasarkan Gambar 6 kecepatan yang dihasilkan oleh metode Euler lebih besar dari pada metode Runge Kutta. Semakin lama perbedaan fase antara metode Euler dengan metode lainnya semakin besar. Penyebab perbedaan ini adalah terletak pada banyaknya evaluasi fungsi masing-masing metode.

Gambar 8. Energi kinetik

Berdasarkan Gambar 8, Energi Kinetik sistem akan berkurang seiring dengan waktu. Hal ini disebabkan karena massa dan kuadrat kecepatan sistem akan berpengaruh pada energi kinetik sistem. Berdasarkan persamaan (7) semakin besar massa sistem pegas, maka semakin besar pula energi kinetik yang dihasilkan. Pengurangan massa lebih besar dan lebih cepat jika dibandingkan dengan peningkatan kecepatan yang sangat kecil. Hal inilah yang menyebabkan energi kinetik semakin menurun.

Gambar 9. Energi potensial gravitasi

Pada Gambar 9 dapat dilihat bahwa Energi potensial gravitasi akan terus bertambah pada awal sistem bergerak. Kemudian Energi akan berkurang sedikit demi sedikit dan akhirnya konstan. Energi potensial gravitasi dipengaruhi oleh massa dan posisi dari sistem yang ditinjau seperti ditunjukkan oleh Gambar 2. Berdasarkan persamaan (9) massa sistem yang terus berkurang dan posisi sistem yang terus berubah akan berpengaruh pada energi potensial gravitasi. Energi potensial gravitasi mencapai nilai maksimum ketika pengaruh massa dan posisi sistem memberikan nilai tertinggi. Energi potensial gravitasi tertinggi sebesar 30 J dan terjadi pada waktu sekitar 10 s.

Gambar 10. Energi potensial elastisitas

Pada Gambar 10, Energi potensial elastisitas mengalami penurunan. Berdasarkan persamaan (8) energi potensial elastisitas dipengaruhi oleh kuadrat posisi pegas setiap waktu. Posisi dipengaruhi oleh massa sistem. Sehingga berkurangnya massa sistem akan menyebabkan energi potensial elastisitas menurun. Energi potensial elastisitas bernilai konstan saat air dalam sistem habis.

Gambar 11. Energi total sistem. Metode Euler warna merah tertimpa metode Runge Kutta.

Energi total sistem merupakan penjumlahan dari energi kinetik, energi potensial gravitasi, dan energi potensial elastisitas yang berkerja pada sistem. Berdasarkan Gambar 11 dapat dilihat bahwa, energi total sistem semakin menurun. Energi total akan bernilai tetap pada waktu 31 s sampai 40 s yaitu sekitar 10 Joule.

Pada Gambar 12 dapat dilihat bahwa pada energi total sistem, selisih solusi antara metode sangat kecil. Untuk RSME antara metode Runge Kutta orde empat dengan Euler sebesar 0,001440 dan metode Runge Kutta *Fehlbberg* dengan Euler sebesar 0,001423. Kemudian RMSE antara metode Runge Kutta *Fehlbberg* dengan metode Runge Kutta orde empat sebesar 0,000141.

Gambar 12. Selisih solusi antara metode pada energi total

5. Kesimpulan

Berdasarkan hasil simulasi diatas dapat disimpulkan bahwa metode Runge Kutta orde empat dan Runge Kutta *Fehlbberg* mampu menggambarkan keadaan sistem osilator dengan massa yang berubah terhadap waktu. Pada hasil simulasi dapat diketahui, bahwa amplitudo mengalami penurunan dan frekuensi terus bertambah. Sistem akan mengalami gerak harmonik sederhana saat air dalam sistem sudah habis.

Daftar Pustaka

- [1] Pitrianto, E., Simulasi dan Visualisasi Gerak Osilasi (Studi Kasus : Gerak Pegas dan Gerak Bandul Matematis (Skripsi S1). Pontianak: Universitas Tanjungpura. 2008.
- [2] Rodrigues, H., Panza, N., Portes, D., Soares, A., The motion of a leaking oscillator: a study for the physics class. Physics Education. 2014;14: p. 557-563.
- [3] Arisa, R., Helmi, Kiftiah, M., Penyelesaian Persamaan Diferensial Bernoulli Menggunakan Metode Runge Kutta Orde Kelima. Bimaster. 2014; 03(3): p. 193-200.
- [4] Suarga, Komputasi Numerik. Yogyakarta: ANDI. 2014.
- [5] Dafik, Persamaan Diferensial Biasa (PDB): Masalah Nilai Awal dan Batas. Jember: FKIP Univeristas Jember. 1999.
- [6] Triatmodjo, B., Metode Numerik. Yogyakarta: Beta Offset. 2002.
- [7] Chapra, S.C., Canale, R.P., Numerical Method for Engineers. 6th ed. United States: The McGrawHill Companies Inc. 2010.