Efek Reaksi Balik Gelombang Gravitasi pada Lensa Gravitasi

Imamal Muttaqien¹⁾

¹⁾Kelompok Keahlian Astrofisika, Jurusan Fisika, Fakultas Sains dan Teknologi.
Universitas Islam Negeri Sunan Gunung Djati, Bandung, INDONESIA
Email: imamal_muttaqien@yahoo.com

Abstrak

Dalam makalah ini, dikaji bagaimana efek reaksi balik gelombang gravitasi ketika merambat dalam ruangwaktu yang tidak datar. Formalisme perambatannya dinyatakan dalam optika gelombang pada lensa gravitasi. Formalisme tersebut memberikan faktor penguatan pada sinyal yang kemudian diaplikasikan dalam model Plummer.

Kata Kunci : *efek reaksi balik, gelombang gravitasi, lensa gravitasi, model Plummer*

1. Pendahuluan

Lensa gravitasi yaitu pembelokan dan pemfokusan cahaya oleh objek masif merupakan sebuah fenomena yang sudah dikenal dengan baik dalam astrofisika dan kosmologi. Dalam lensa gravitasi untuk cahaya, kuantitas pelensaan seperti: sudut belok, posisi citra, jumlah citra dll bisa dihitung dengan menggunakan aproksimasi optika geometrik. Penghitungan sudut belok pada lensa gravitasi diprediksi dengan tepat pertama kali oleh Einstein dengan teori relativitas umumnya (Schneider, 1992).

Ada sumber gelombang lain yang diprediksi oleh teori relativitas umum, yaitu gelombang gravitasi dengan melinearisasi teori medan Einstein. Gelombang gravitasi ini berasal dari gerakan materi yang mengakibatkan perubahan kelengkungan ruangwaktu di sekitarnya. Gelombang gravitasi ini dapat dianalogikan sebagai riak ruangwaktu yang merambat dengan kecepatan cahaya dalam vakum. Sampai saat ini gelombang gravitasi belum dapat terdeteksi secara langsung (Thorne, 1987).

Sama dengan cahaya dan gelombang elektromagnetik, gelombang gravitasi juga mengalami pelensaan ketika merambat dalam ruangwaktu yang tidak homogen. Namun apabila gelombang memiliki panjang gelombang λ yang jauh lebih besar daripada radius Schwarzschild dari sebuah lensa bermassa M_L , maka efek difraksi menjadi penting dan perbesarannya μ menjadi kecil. Kemudian karena gelombang gravitasi koheren, maka efek interferensi juga harus diperhitungkan. Karena adanya perbedaan yang cukup mendasar, maka

aproksimasi optika geometrik harus diganti dengan optika gelombang dalam kasus pelensaan gelombang gravitasi, meskipun dalam kasus λ yang kecil, limit optika geometrik masih bisa berlaku (Nakamura, and Deguchi, 1999).

Takahashi dan Nakamura (2003) melakukan kajian pelensaan gelombang gravitasi elombang gravitasi berfrekuensi rendah, mereka mengambil model lensa: massa titik, bola isothermal singular untuk lubang hitam supermasif dan juga *dark matter halo* pada galaksi yang akan dijumpai ketika gelombang gravitasi merambat dari sumber menuju pengamat. Mereka mendapatkan faktor penguatan yang lebih besar. Moylan juga mengulangi pekerjaan pelensaan oleh *dark matter halo* tetapi dengan metode numerik yang berbeda (Moylan, dkk, 2007). Muttaqien dalam tesis masternya yang merupakan studi awal (Muttaqien, 2009), menggunakan metode numerik yang dikembangkan oleh Moylan untuk menghitung faktor penguatan apabila gelombang gravitasi dilensakan oleh galaksi yang dimodelkan dengan baik oleh model Plummer.

Dalam makalah ini digunakan satuan geometri $c = G = 1$ dan metrik Minkowski $\text{diag}(-1,1,1,1)$.

2. Persamaan Dasar

Pertama kita mengasumsikan bahwa gelombang gravitasi merambat dalam potensial gravitasi sebuah lensa. Metrik latar belakangnya diberikan oleh (Schneider, 1992) :

$$ds^2 = -(1 + 2U) dt^2 + (1 - 2U) dr^2 \quad (1)$$

$$\equiv g_{\mu\nu}^{(B)} dx^\mu dx^\nu,$$

dengan $U(r)$ ($\ll 1$) merupakan potensial gravitasi Newtonian dari lensa. Meskipun metrik ini tidak memperkenankan adanya ekspansi kosmologi, namun kita masih bisa menggunakannya untuk kepentingan kosmologi. Penggunaan metrik ini, bukan metrik Friedmann-Robertson-Walker terperturbasi yang merupakan metrik standar dalam studi kosmologi, masih memadai karena persamaan perambatan gelombang gravitasi akan invarian secara konformal jika panjang gelombangnya jauh lebih kecil dibandingkan dengan radius Hubble. Jika terdapat perturbasi linier $h_{\mu\nu}$ dalam metrik latar belakang $g_{\mu\nu}^{(B)}$ sebagai [2]:

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^{(B)} + h_{\mu\nu}. \quad (2)$$

Gelombang gravitasi $h_{\mu\nu}$ yang merambat dalam metrik latar belakang tersebut akan memenuhi persamaan dalam gauge Lorentz:

$$h_{\mu\nu;\alpha} + 2R_{\alpha\mu\beta\nu}^{(B)} h^{\alpha\beta} = 0, \quad (3)$$

dengan $R_{\alpha\mu\beta\nu}^{(B)}$ adalah tensor Riemann metrik latar belakang. Jika skala variasi ($\sim$ panjang gelombang) dari $h_{\mu\nu}$ jauh lebih kecil dibandingkan radius kelengkungan metrik latar belakang kita mendapatkan:

$$h_{\mu\nu;\alpha} = 0. \quad (4)$$

Dalam makalah ini, kita mengasumsikan jarak antara sumber ke pengamat sangatlah jauh sehingga aproksimasi lensa tipis dapat digunakan. Dalam situasi ini ketika gelombang gravitasi tersebut melalui lensa, rotasi maupun polarisasinya secara umum hanya memberikan efek yang kecil terhadap pola interferensi, sehingga gelombangnya dapat diperlakukan sebagai gelombang skalar saja, sehingga dapat dituliskan sebagai:

$$h_{\mu\nu} = \phi e_{\mu\nu}, \quad (5)$$

dengan $e_{\mu\nu}$ adalah tensor polarisasi gelombang gravitasi yang wave satisfying $e_{\mu}^{\mu} = 0$, $e_{\mu\nu} e^{\mu\nu} = 2$ dan ϕ adalah skalar yang merupakan amplitudo gelombang gravitasi dalam domain waktu. Dalam situasi ini, perubahan polarisasi dan juga rotasi sangatlah kecil karena U ($\ll 1$)

sehingga kita boleh menganggap polarisasinya konstan. Perambatan gelombang gravitasi dalam metrik latar belakang adalah. Dengan asumsi ini, perambatan gelombang pada ruangwaktu lengkung hanya dikarakterisasi oleh amplitudo skalar saja ϕ . Persamaan perambatan gelombangnya diberikan oleh:

$$\partial_{\mu} \partial^{\mu} \phi = \partial_{\mu} \left(\sqrt{-g^{(B)}} g^{(B)\mu\nu} \partial_{\nu} \phi \right) = 0. \quad (6)$$

Untuk gelombang skalar dalam domain frekuensi, $\tilde{\phi}(\omega, r)$, Pers. (6) dan (1) dapat dituliskan sebagai:

$$(\nabla^2 + \omega^2) \tilde{\phi} = 4\omega^2 U \tilde{\phi}, \quad (7)$$

dengan $\omega = 2\pi f$, persamaan di atas haruslah diselesaikan dengan integral difraksi Kirchhoff (Nakamura and Deguchi, 1999; Takahashi dan Nakamura, 2003)

Hal yang biasa dilakukan dalam menghitung faktor penguatan adalah dengan membandingkan rasio antara amplitudo gelombang gravitasi terlensakan, $\tilde{\phi}_{obs}^L(f)$, dan yang tidak terlensakan, $\tilde{\phi}_{obs}(f)$, yaitu:

$$F(f) = \frac{\tilde{\phi}_{obs}^L(f)}{\tilde{\phi}_{obs}(f)}. \quad (8)$$

Geometri pelensaan, letak sumber; lensa; dan pengamat, ditunjukkan pada Gambar 1. menunjukkan situasi pelensaan. D_L merupakan jarak dari pengamat ke lensa, D_S adalah jarak dari pengamat ke sumber dan D_{LS} adalah jarak dari lensa ke sumber, η merupakan vektor posisi sumber pada bidang sumber, sedangkan ξ merupakan parameter *impact* pada bidang lensa. Kita menggunakan besaran tak berdimensi yaitu:

$$\mathbf{x} = \frac{\xi}{\xi_0}; \quad \mathbf{y} = \frac{D_L}{\xi_0 D_S} \eta, \quad (9)$$

dengan $\mathbf{x}$ merupakan posisi citra pada bidang lensa and $\mathbf{y}$ adalah posisi sumber pada bidang sumber, sedangkan ξ_0 merupakan konstanta normalisasi.

Gambar 1. Geometri lensa gravitasi pada gelombang gravitasi.

Meskipun kita tidak memperhatikan ekspansi kosmologi dalam metrik (1), faktor penguatan di atas dapat digunakan dalam situasi kosmologis karena panjang gelombang gravitasi jauh lebih kecil daripada skala horizon sekarang. Hal yang perlu dilakukan adalah: i) menggunakan jarak diameter sudut, ii) mengganti f dengan $f(1 + z_L)$, dengan z_L merupakan *redshift* lensa.

Dalam aproksimasi lensa tipis, lensa hanya dikarakterisasi oleh rapat massa permukaan $\Sigma(\xi)$ dan gelombang gravitasi hanya dihamburkan pada bidang lensa. Sehingga, faktor penguatan $F(f)$ pada pengamat diberikan oleh:

$$F(w, \mathbf{y}) = \frac{w}{2\pi i} \int d^2x \exp[iwT(\mathbf{x}, \mathbf{y})], \quad (10)$$

dengan $w \sim M_L \omega_z$, M_L adalah massa lensa dan ω_z adalah frekuensi ter-*redshift*-kan. $T(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ merupakan waktu tiba gelombang gravitasi dari sumber ke pengamat:

$$T(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2} |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2 - \psi(\mathbf{x}) + \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}),$$

dengan $\psi(\mathbf{x})$ adalah potensial skalar lensa yang terskalakan yang merupakan potensial Newtonian yang terproyeksi. Faktor tambahan $\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ dipilih sedemikian rupa

sehingga waktu tiba minimum adalah 0. Pers.

3. Aplikasi pada Model Plummer

Galaksi, yang merupakan salah satu kandidat lensa, diaproksimasi baik dengan model Plummer, rapat massa permukaan diberikan oleh (Schneider, 1992):

$$\Sigma(\xi) = \frac{\Sigma_0}{\left[1 + (\xi/\xi_c)^2\right]^2}, \quad (12)$$

dan potensial pembelokan diberikan oleh:

$$\psi(x) = \frac{\kappa_0}{2} \ln(1 + x^2). \quad (13)$$

Untuk $\kappa_0 > 1$, sebuah lensa dengan rapat massa permukaan (12) memiliki kurva radial kritis:

$$x_r = \sqrt{\sqrt{2\kappa_0 + \frac{\kappa_0^2}{4}} - 1 - \frac{\kappa_0}{2}}, \quad (14)$$

dan kaustik pada bidang lensa:

$$y_r = \frac{2(1-p)x_r^3}{1 - (1-2p)x_r^2}. \quad (15)$$

Sumber yang terletak pada $|y| < y_r$ memiliki tiga buah citra, sedangkan yang terletak pada $|y| > y_r$ hanya membentuk satu buah citra.

Jika kita memasukkan Pers. (13) pada

$$\begin{aligned} F(w, \mathbf{y}) = & -iwe^{iwy^2/2} \int_0^\infty dx x J_0(wxy) \\ & \times \int_0^\infty dx \exp\left[iw\left(x^2 - \frac{\kappa_0}{2} \ln(1+x^2)\right)\right] \\ & \times \int_0^\infty dx \exp[iw\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})] \end{aligned} \quad (16)$$

dengan J_0 fungsi Bessel orde 0, dan

$$\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\kappa_0}{2} \ln(1+x^2) - \frac{1}{2} \left(\frac{\kappa_0 x}{(1+x^2)}\right)^2$$

Kami menghitung integral di atas secara numerik untuk beberapa parameter yang berbeda menggunakan program Mathematica 7 dengan menggunakan metode yang dikembangkan oleh Moylan bernama LevinIntegrate (Moylan, 2007). Kemudian dalam makalah ini dipilih nilai $\kappa_0 = 5$ seperti yang telah dikerjakan

sebelumnya (Muttaqien, 2009) dan posisi sumber $y < 1.62$ sehingga menurut (14) dan (15) akan terbentuk tiga buah citra yang akan berinterferensi dan juga sangat kecil $y \leq 0.1$ agar faktor penguatan bernilai mendekati maksimum.

Gambar 2. Faktor penguatan $F(w, y)$ untuk $y = 0.01$ dan $\kappa_0 = 5$

Gambar 3. Faktor penguatan $F(w, y)$ untuk $y = 0.03$ dan $\kappa_0 = 5$

Gambar 4. Faktor penguatan $F(w, y)$ untuk $y = 0.05$ dan $\kappa_0 = 5$

Gambar 5. Faktor penguatan $F(w, y)$ untuk $y = 0.08$ dan $\kappa_0 = 5$

Gambar 6. Faktor penguatan $F(w, y)$ untuk $y = 0.1$ dan $\kappa_0 = 5$

Dari Gambar 2. Kita dapat menarik kesimpulan bahwa faktor penguatan akibat pelensaan memberikan nilai yang besar, mendekati 14 kali, dan faktor penguatan juga berkelakuan baik, hal ini disebabkan karena gelombang gravitasi yang dilensakan tidak memiliki beda fase yang cukup besar.

Sedangkan pada Gambar 3., Gambar 4., Gambar 5., dan Gambar 6. Posisi sumber semakin jauh dari sumbu optik, hal ini tentu berakibat pada semakin kecilnya faktor penguatan yang dihasilkan. Namun ada hal yang menarik, fitur pada faktor penguatan sudah tidak lagi semulus ketika posisi sumber sangat dekat dengan sumbu optik. Kita mendapatkan terdapat semacam ketidakseragaman pada puncak-puncaknya dan fitur tersebut berulang, selain itu pola osilasinya juga semakin banyak ketika posisi sumber semakin jauh dari sumbu optik (y semakin besar). Seperti yang disarankan oleh Moylan (2010), hal ini bukanlah kesalahan pada komputasi melainkan sesuatu yang memang benar terjadi. Kita menganggap fenomena ini sebagai efek reaksi balik gelombang

gravitasi pada lensa gravitasi. Fenomena ini tidak dijumpai pada model lensa massa titik, *disk* dan juga SIS.

4. Ucapan Terimakasih

Penulis mengucapkan terimakasih kepada Premana W. Premadi dan Andrew J. Moylan atas diskusi dan komentarnya yang membangun, juga kepada Fiki Taufik yang mengajarkan Mathematica

Pustaka

- Moylan, A. J., McClelland., Scott, S. M., Searle, A. C., and Bicknell, G. V., Numerical wave optics and the lensing of gravitational waves by globular cluster, (2007) WSPC – Proceedings.
- Moylan, A., J., private communication (2010)
- Muttaqien., I. Lensa Gravitasi pada Gelombang Gravitasi, Tesis Master ITB (2009)
- Nakamura, T.T., and Deguchi, S., Wave optics in gravitational lensing, Progress of Theoretical Physics Supplement 133, 137 (1999).
- Schneider, P., Ehlers, J., and Falco, E.E., Gravitational Lenses (Springer, 1992).
- Takahashi, R. and Nakamura, T., Wave Effects in the Gravitational Lensing from Gravitational Waves from Chirping Binaries, Astrophysical Journal 595, 1039 (2003).
- Thorne, K., S., Gravitational Radiation, in Three Hundred Years of Gravitation, Ed. Hawking and Israel, (Cambridge University Press, 1987).