Buletin Ilmiah Mat. Stat. dan Terapannya (Bimaster)
Volume 02, No. 2 (2013), hal 101 – 106.

COMPLETION DARI RUANG METRIK

Andi Rini, Sugiatno, Bayu Prihandono

INTISARI

Pada sebarang ruang metrik berlaku setiap barisan konvergen adalah barisan Cauchy, tapi tidak berlaku sebaliknya. Dengan kata lain ada ruang metrik dimana ada barisan Cauchy yang tidak konvergen. Ruang metrik yang demikian dinamakan ruang metrik tidak lengkap. Setiap ruang metrik tidak lengkap memiliki suatu completion. Karenanya dalam penelitian ini akan ditentukan completion dari suatu ruang metrik tidak lengkap. Completion dari ruang metrik tidak lengkap ditentukan dengan langkah-langkah berikut: mengidentifikasi apakah ruang metrik (X, d) adalah lengkap, menentukan closure dari X, menentukan ruang metrik baru (X^*, d) yang memuat (X, d) dan closure X berada dalam X^*, menyelidiki apakah (X^*, d) adalah lengkap, menunjukkan bahwa subset dari X^* adalah padat di dalam X^*, menunjukkan bahwa (X, d) isometrik ke subset padat dalam (X^*, d). Hasil penelitian menunjukkan bahwa completion dari ruang metrik tidak lengkap X adalah ruang metrik lengkap X^* dengan $X \subset X^*$ dan X padat di X^* ($\bar{X} = X^*$).

Kata Kunci : *closure, isometrik, subset padat, ruang metrik lengkap.*

PENDAHULUAN

Suatu ruang metrik (X, d) adalah suatu himpunan X yang dilengkapi dengan suatu metrik d pada X, sedemikian hingga d memenuhi aksioma-aksioma berikut, yaitu untuk setiap $x, y, z \in X$:

1. $d(x, y) \geq 0$ dan $d(x, y) = 0$ jika hanya jika $x = y$ (definit positif);
2. $d(x, y) = d(y, x)$ (simetris);
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (ketaksamaan segitiga) [1].

Contohnya fungsi d yang didefinisikan oleh $d(a, b) = |a - b|$, dengan a dan b bilangan-bilangan real adalah metrik dan disebut metrik Euclidean pada $\mathbb{R}$.

Suatu barisan $\{x_n\}$ di ruang metrik (X, d) dikatakan konvergen ke suatu titik $p \in X$, jika untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat suatu $M \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga untuk setiap $n \geq M$ berlaku $d(x_n, p) < \varepsilon$. Titik p disebut limit dari $\{x_n\}$. Dinyatakan dengan $lim_{n\to\infty} x_n = p$ atau $x_n \to p$ [1]. Suatu barisan $\{x_n\}$ di dalam ruang metrik (X, d) dikatakan barisan Cauchy jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat suatu $p \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $n \geq p$ dan setiap $m \geq p$ berlaku $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ [1].

Setiap barisan konvergen di dalam ruang metrik adalah barisan Cauchy [2]. Akan tetapi tidak setiap barisan Cauchy di dalam ruang metrik konvergen [2]. Karenanya ada ruang metrik dimana ada barisan Cauchy yang tidak konvergen. Apabila setiap barisan Cauchy di dalam suatu ruang metrik konvergen maka ruang metrik tersebut lengkap [2]. Namun, apabila ada barisan Cauchy di ruang metrik tidak konvergen maka ruang metrik tersebut gagal lengkap atau disebut juga ruang metrik tidak lengkap.

Setiap ruang metrik tidak lengkap memiliki suatu *completion*. *Completion* dari suatu ruang metrik adalah ruang metrik lengkap [3]. Penentuan *completion* dari ruang metrik dilakukan oleh Bult (2010) dengan cara melengkapi barisan Cauchy-nya, yaitu dengan menambahkan titik yang dapat berperan sebagai limit dari barisan Cauchy yang tidak konvergen di ruang metrik. Kemudian limit ini dianggap sebagai suatu titik dalam *completion* dari ruang metrik tersebut [4]. Abdeljawad (2010) membuktikan teorema *completion* untuk *cone metric spaces* dan *cone normed spaces*. Hasil penelitian menunjukkan bahwa setiap *cone metric spaces* dan *cone normed spaces* dapat dijadikan lengkap [5]. Suatu *cone metric space* (X, d) dikatakan lengkap jika setiap barisan Cauchy-nya konvergen di dalam X [6].

Tujuan dari penulisan artikel ini adalah menyelidiki kelengkapan suatu ruang metrik dan menentukan *completion* dari ruang metrik tidak lengkap. Masalah yang akan dibahas dalam penulisan artikel ini dibatasi hanya pada ruang metrik tidak lengkap yang dilengkapi dengan metrik Euclidean pada $\mathbb{R}$.

Penentuan *completion* dari ruang metrik tidak lengkap diawali dengan mengidentifikasi apakah ruang metrik X yang tersedia adalah lengkap. Karena setiap ruang metrik memiliki *completion* maka ruang metrik X pun memiliki *completion* yang diperoleh dengan terlebih dahulu menentukan *closure* dari X. Berikutnya ditentukan ruang metrik baru X^*, dengan catatan ruang metrik baru ini memuat ruang metrik sebelumnya yang gagal lengkap. Selain itu *closure* dari ruang metrik tidak lengkap X haruslah berada di dalam ruang metrik baru X^*. Setelah itu diselidiki apakah ruang metrik baru X^* adalah lengkap. Apabila X^* terbukti lengkap, selanjutnya ditunjukkan bahwa subset dari X^* adalah padat. Kemudian diselidiki apakah ruang metrik tidak lengkap X isometrik ke subset padat dalam ruang metrik lengkap X^*. Dengan demikian diperolehlah *completion* dari ruang metrik X berupa ruang metrik lengkap X^*, sesuai dengan definisi dan teorema *completion* dari suatu ruang metrik.

KEDUDUKAN TITIK TERHADAP HIMPUNAN DI RUANG METRIK

Diberikan ruang metrik (X, d) dan himpunan $A \subset X$. Untuk sebarang titik $a \in X$ dan konstanta real $r > 0$, himpunan $N_r(a) = \{x \in X: \ d(x, a) < r\}$, disebut persekitaran (*neighbourhood*) titik a dengan jari-jari r [7]. Diberikan ruang metrik (X, d), titik $x \in X$, dan himpunan $A \subset X$. Titik a disebut titik dalam (*interior point*) himpunan A jika ada bilangan $r > 0$ sehingga $N_r(a) \subset A$ [7]. Titik a disebut titik batas (*boundary point*) himpunan A jika untuk setiap bilangan $r > 0$ berlaku $N_r(a) \cap A \neq \emptyset$ dan $N_r(a) \cap A^c \neq \emptyset$ [7]. Titik a disebut titik limit (*limit point*) himpunan A jika untuk setiap bilangan $r > 0$ berlaku $N_r(a) \cap A - \{x\} \neq \emptyset$ [7].

Diberikan suatu himpunan A, *closure* himpunan A dinotasikan dengan $\bar{A}$ dan $x \in \bar{A} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists\, y \in A \ni |x - y| < \varepsilon$. Dengan kata lain $x \in \bar{A}$ disebut titik *closure* jika setiap interval terbuka yang memuat x juga memuat suatu titik di A. A' menotasikan koleksi semua titik limit himpunan A. $\bar{A}$ didefinisikan sebagai himpunan tertutup terkecil yang memuat A, $\bar{A} = A \cup A'$. Himpunan A dikatakan tertutup (*closed*) jika $\bar{A} = A$ [7].

Diketahui (X, d) ruang metrik, himpunan D dikatakan padat di dalam X jika $D \subset X$ dan $\bar{D} = X$ [7]. Diberikan (X, d) dan (Y, ρ), keduanya adalah ruang metrik. Suatu fungsi f dari (X, d) ke (Y, ρ) dikatakan sebuah isometri jika $\rho\big(f(x), f(y)\big) = d(x, y)\ \forall\, x, y \in X$. Ruang metrik (X, d) dikatakan isometrik ke ruang metrik (Y, ρ) jika terdapat suatu isometri dari (X, d) ke (Y, ρ) [2].

RUANG METRIK LENGKAP

Berikut ini diberikan definisi dari ruang metrik lengkap.

Definisi 1 [1] *Suatu ruang metrik (X, d) dikatakan lengkap jika setiap barisan Cauchy-nya konvergen ke suatu titik di dalam X.*

Diberikan (X, d) suatu ruang metrik dan $A \subset X$ maka (A, d) juga merupakan ruang metrik dan disebut subruang dari (X, d). (A, d) adalah lengkap jika setiap barisan Cauchy di dalam A konvergen ke suatu titik di dalam A.

Setiap subruang tertutup dari ruang metrik lengkap adalah lengkap dan setiap subruang lengkap dari ruang metrik adalah tertutup [1].

COMPLETION DARI RUANG METRIK

Terdapat ruang metrik dimana ada barisan Cauchy yang tidak konvergen. Ruang metrik yang demikian dinamakan ruang metrik tidak lengkap. Setiap ruang metrik tidak lengkap memiliki suatu *completion*. *Completion* dari suatu ruang metrik adalah ruang metrik lengkap dan tunggal. Hal ini dijabarkan sebagai berikut.

Lemma 2 [8] *Diberikan (X, d) suatu ruang metrik, (X^*, d^*) suatu ruang metrik lengkap dan $\varphi: (X, d) \to (X^*, d^*)$ suatu isometri, maka $\varphi[X]$ padat di X^* jika hanya jika $\varphi[X]$ memenuhi sifat pemetaan umum:*
Diberikan sebarang ruang metrik lengkap (Y, ρ) dan suatu isometri $f: X \to Y$, terdapat suatu isometri tunggal $F: X^* \to Y$ sehingga $F \circ \varphi = f$.

Bukti.
Anggap bahwa $\varphi[X]$ padat di X^*, akan ditunjukkan bahwa $\varphi[X]$ memenuhi sifat pemetaan umum. Diberikan (Y, ρ) ruang metrik lengkap dan $f: X \to Y$ suatu isometri dari X ke Y. Karena φ isometri, φ adalah fungsi satu-satu. Dengan demikian $\varphi^{-1}: \varphi[X] \to X$ adalah isometri dari $\varphi[X]$ ke X. Karena f isometri dari X ke Y, berarti bahwa $h \coloneqq f \circ \varphi^{-1}$ adalah suatu isometri dari subset padat $\varphi[X]$ dari X^* ke ruang metrik lengkap Y. Karenanya dapat diperluas secara tunggal ke suatu isometri F dari X^* ke Y, maka untuk sebarang $x \in X$

$$F \circ \varphi(x) = h(\varphi(x)) = f \circ \varphi^{-1}(\varphi(x)) = f(x).$$

Dengan demikian $F \circ \varphi = f$. ■

Teorema 3 [8] *Setiap ruang metrik memiliki suatu completion.*

Bukti.
Dimisalkan (X, d) suatu ruang metrik. Diberikan $C[X]$ kumpulan dari semua barisan Cauchy dalam X. Suatu relasi sebanding $(\sim)$ pada $C[X]$ didefinisikan oleh

$$(x_n) \sim (y_n) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0.$$

Dimisalkan X^* adalah himpunan dari semua kelas ekuivalen untuk $\sim$:

$$X^* = \{[(x_n)] : (x_n) \in C[X]\}.$$

$d^*: X^* \times X^* \to [0, \infty)$ didefinisikan oleh

$$d^*([(x_n)], [(y_n)]) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n),$$

dimana $[(x_n)], [(y_n)] \in X^*$.

Untuk menunjukkan bahwa d^* terdefinisi dengan baik, diberikan (x'_n) dan (y'_n) dua barisan Cauchy dalam X sehingga $(x_n) \sim (x'_n)$ dan $(y_n) \sim (y'_n)$. Akan ditunjukkan

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x'_n) = \lim_{n\to\infty} d(y_n, y'_n) = 0.$$

dengan ketaksamaan segitiga,

$$d(x_n, y_n) \le d(x_n, x'_n) + d(x'_n, y'_n) + d(y'_n, y_n) \text{ dan}$$
$$d(x'_n, y'_n) \le d(x'_n, x_n) + d(x_n, y_n) + d(y_n, y'_n).$$

Karenanya,

$$|d(x_n, y_n) - d(x'_n, y'_n)| \le d(x_n, x'_n) + d(y_n, y'_n) \to 0.$$

Karena keduanya $(d(x_n, y_n))$ dan $(d(x'_n, y'_n))$ konvergen, ini menunjukkan bahwa

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} d(x'_n, y'_n).$$

Jadi, d^* terdefinisi dengan baik.

Selanjutnya, ditunjukkan bahwa d^* adalah suatu metrik pada X^*.

Ambil $[(x_n)], [(y_n)], [(z_n)] \in X^*$, maka

$$d^*([(x_n)], [(y_n)]) = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0 \Leftrightarrow (x_n) \sim (y_n) \Leftrightarrow [(x_n)] = [(y_n)].$$

Demikian pula,

$$d^*([(x_n)], [(y_n)]) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} d(y_n, x_n) = d^*([(y_n)], [(x_n)]).$$

Karena $d(x_n, z_n) \le d(x_n, y_n) + d(y_n, z_n)$,

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, z_n) \le \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) + \lim_{n\to\infty} d(y_n, z_n).$$

Sehingga

$$d^*([(x_n)], [(z_n)]) \le d^*([(x_n)], [(y_n)]) + d^*([(y_n)], [(z_n)]).$$

Karenanya d^* adalah suatu metrik pada X^*.

Untuk setiap $x \in X$, ambil $\hat{x} = [(x, x, \dots)] \in X^*$, kelas ekuivalen dari barisan konstan $(x, x, \dots)$. Didefinisikan $\varphi : X \to X^*$ dengan $\varphi(x) = \hat{x}$, maka untuk sebarang $x, y \in X$,

$$d^*\big(\varphi(x), \varphi(y)\big) = d^*(\hat{x}, \hat{y}) = \lim_{n\to\infty} d(x, y) = d(x, y).$$

Karenanya φ adalah suatu isometri dari X ke X^*.

Untuk menunjukkan bahwa $\varphi[X]$ padat di X^*,
Ambil $x^* = [(x_n)] \in X^*$ dan diberikan $\varepsilon > 0$. Karena (x_n) adalah suatu barisan Cauchy, maka terdapat suatu $N \in \mathbb{N}$ sehingga untuk sebarang $m, n \ge N$, $d(x_m, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}$.
misal $z = x_N$, maka $\hat{z} \in \varphi[X]$ dan

$$d^*(x^*, \hat{z}) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, z) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, x_N) \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Dengan demikian $\hat{z} \in B_{d^*}(x^*, \varepsilon) \cap \varphi[X]$. Karenanya, $\varphi[X]$ padat di X^*.

Selanjutnya, ditunjukkan bahwa (X^*, d^*) adalah lengkap.
Akan ditunjukkan bahwa setiap barisan Cauchy di subruang padat $\varphi[X]$ konvergen di X^*.
Ambil $(\hat{z}_k)$ sebarang barisan Cauchy di $\varphi[X]$, dimana setiap $\hat{z}_k$ diwakili oleh barisan Cauchy $(z_k, z_k, \dots)$.
Karena φ adalah suatu isometri,

$$d(z_n, z_m) = d^*(\hat{z}_n, \hat{z}_m) \quad \text{untuk setiap } m, n.$$

Karenanya, $(z_1, z_2, z_3, \dots)$ adalah suatu barisan Cauchy di X.
Ambil $z^* = [(z_1, z_2, z_3, \dots)] \in X^*$.

Untuk menunjukkan bahwa $(\hat{z}_k)$ konvergen ke z^*, diberikan $\varepsilon > 0$, maka terdapat $N \in \mathbb{N}$ sehingga $d(z_k, z_n) < \frac{\varepsilon}{2}$ untuk sebarang $k, n \ge N$.
Karenanya, untuk setiap $k \ge N$,

$$d^*(\hat{z}_k, z^*) = \lim_{n\to\infty} d(z_k, z_n) \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Terbukti bahwa $(\hat{z}_k)$ konvergen ke suatu titik z^* di X^*. Jadi, X^* adalah lengkap.

Selanjutnya, ditunjukkan bahwa *completion* dari ruang metrik adalah tunggal.
Untuk menunjukkan hal ini digunakan Lemma 2 sifat pemetaan umum.

Jika $G : X^* \to Y$ adalah isometri yang lain sehingga $G \circ \varphi = f$, maka $F = G$ pada subset padat $\varphi[X]$ dari X^*; karenanya keduanya harus sama pada X^*, dengan kata lain $F = G$.

Sebaliknya, anggap bahwa F memenuhi sifat pemetaan umum dan menunjukkan bahwa $\varphi[X]$ padat di X^*. Karena $\overline{\varphi[X]}$ tertutup di ruang metrik lengkap X^*, $\overline{\varphi[X]}$ juga lengkap. Diberikan $Y = \overline{\varphi[X]}$ dan $f = \varphi$. Dengan sifat pemetaan umum, terdapat isometri tunggal $F : X^* \to Y$ sehingga $F \circ \varphi = f = \varphi$. Hal ini menunjukkan bahwa F identitas pada subruang $\varphi[X]$, sehingga F identitas pada $\overline{\varphi[X]}$. Dengan demikian diperoleh $X^* = \overline{\varphi[X]}$. ∎

Pembahasan tentang *completion* dari suatu ruang metrik, tidak lepas dari definisi dan teorema berikut ini.

Definisi 4 [2] *Diberikan (X, d) suatu ruang metrik. Suatu ruang metrik (X^*, d^*) dikatakan suatu completion dari ruang metrik (X, d) jika (X^*, d^*) lengkap dan (X, d) adalah isometrik ke suatu subset padat dari (X^*, d^*).*

Selanjutnya, diberikan teorema pendukung dari definisi tersebut di atas.

Teorema 5 [9] *Diberikan (A, ρ) sebuah subruang dari ruang metrik lengkap (X, ρ), jika $\bar{A}$ closure dari A di dalam (X, ρ) maka $(\bar{A}, \rho)$ adalah sebuah completion dari (A, ρ).*

Bukti.
Akan dibuktikan bahwa $(\bar{A}, \rho)$ adalah lengkap. Diberikan $\{x_n\}$ barisan Cauchy di $\bar{A}$. Karena (X, ρ) lengkap dan $\bar{A} \subset X$ maka barisan $\{x_n\}$ konvergen ke suatu elemen $x \in X$. $\bar{A}$ *closure* dari A maka $\bar{A}$ tertutup, sehingga diperoleh $x \in \bar{A}$. Oleh karena itu ruang $(\bar{A}, \rho)$ adalah lengkap. ■

Berdasarkan Definisi 4 dan Teorema 5 dapat disimpulkan bahwa sebuah *completion* dari ruang metrik tidak lengkap X adalah ruang metrik lengkap X^* dengan $X \subset X^*$ dan X padat di X^* ($\bar{X} = X^*$).

Berikut ini diberikan bukti *completion* dari ruang metrik $\big((0,1), d\big)$ adalah $([0,1], d)$.

Langkah-langkah pembuktian.
1) Mengidentifikasi apakah ruang metrik ((0,1), *d*) lengkap.
Akan ditunjukkan bahwa;
(i) $\{x_n\}$ di dalam $X = (0,1)$ merupakan barisan Cauchy.
Ambil barisan $\{x_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}$ dalam ruang metrik ((0,1), *d*). Misalkan $\varepsilon > 0$, maka terdapatlah $p \in \mathbb{N}$, sedemikian hingga $\frac{1}{p} < \varepsilon$. Untuk $n, m > p$ (diambil $m \leq n$), berlaku:

$$d(x_n, x_m) = |x_n - x_m| < x_m \leq \frac{1}{p} < \varepsilon.$$

(ii) $\{x_n\}$ konvergen ke suatu titik dalam X.
Diketahui $\{x_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}$ dalam ruang metrik ((0,1), *d*), sehingga $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.
Sebab limit dari $\{x_n\}$ adalah 0 dan $0 \notin X$, maka $\{x_n\}$ tidak konvergen dalam X.
Karenanya $\{x_n\}$ adalah barisan Cauchy yang tidak konvergen ke suatu titik dalam X. Jadi, $\big((0,1), d\big)$ adalah ruang metrik tidak lengkap. ■
2) Menentukan *closure* dari X.
Ambil sebarang $x \in [0,1]$ sedemikian hingga berlaku $N_r(x) \cap X - \{x\} \neq \emptyset$ untuk setiap bilangan real $r > 0$. Karena untuk setiap $r > 0$ selalu berlaku bahwa $N_r(x) \cap X - \{x\} \neq \emptyset$ maka $x \in [0,1]$ merupakan titik limit X, sehingga diperoleh $X' = [0,1]$.
Karenanya $\bar{X}$ = (0,1) ∪ [0,1] = [0,1]. Jadi, *closure* dari X adalah [0, 1].
3) Menentukan ruang metrik lengkap yang memuat ((0,1), *d*).
Misalkan ruang metrik lengkap tersebut adalah (*Y*, *d*).
Menurut Teorema 5, ((0,1), *d*) haruslah subruang dari (*Y*, *d*) dan $\bar{X}$ di dalam (*Y*, *d*). Misalkan (*Y*, *d*) = ([0,1], *d*), maka ((0,1), *d*) adalah subruang dari ([0,1], *d*) dan $\overline{(0,1)}$ di dalam ([0,1], *d*).
Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa ([0,1], *d*) adalah ruang metrik lengkap.
Bukti.
Ambil sebarang barisan Cauchy $\{x_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}$ dalam ruang metrik X = [0,1], maka $\{x_n\}$ konvergen ke titik $0 \in X$. Karena $\{x_n\}$ merupakan barisan Cauchy yang konvergen dalam ruang metrik X. Jadi, terbukti bahwa ([0,1], *d*) adalah ruang metrik lengkap. ■
4) Menunjukkan bahwa subset dari ([0,1], *d*) adalah padat.
Diketahui bahwa (0,1) adalah subset dari [0,1]. (0,1) ⊂ [0,1] dikatakan padat di [0,1], jika $\overline{(0,1)}$ = [0,1].

Karena $\overline{(0,1)}$ adalah [0,1] maka terbukti bahwa subset dari ([0,1], *d*) adalah padat. ■

5) Menunjukkan bahwa ((0,1), *d*) isometrik ke subset padat dari ([0,1], *d*).

Akan ditunjukkan bahwa ((0,1), *d*) isometrik ke ((0,1), *d*).

Diberikan $A_1 = (0,1)$ dan $A_2 = (0,1)$ dengan metrik Euclidean.

Fungsinya $f : A_1 \to A_2$ didefinisikan $f(x) = 0,2 + x$, $\forall\, x \in A_1$.

f adalah isometri, sebab jika $x, y \in A_1$ sedemikian hingga $f(x) = f(y)$, yaitu $0,2 + x = 0,2 + y$ maka $x = y$ diperoleh $d\big(f(x), f(y)\big) = d(x, y)$.

Jadi, ((0,1), *d*) isometrik ke subset padat dari ([0,1], *d*).

Dengan demikian, menurut Definisi 4 dan Teorema 5 terbukti bahwa ([0,1], *d*) adalah *completion* dari ((0,1), *d*). ■

PENUTUP

Dari hasil pembahasan pada penulisan artikel ini dapat disimpulkan bahwa:

1. Suatu ruang metrik dikatakan ruang metrik lengkap jika setiap barisan Cauchy-nya konvergen ke suatu titik di dalam ruang tersebut dan jika ada barisan Cauchy yang tidak konvergen ke suatu titik di dalam ruang tersebut maka dikatakan bahwa ruang metrik tersebut tidak lengkap.
2. Sebuah *completion* dari ruang metrik tidak lengkap X adalah ruang metrik lengkap X^* dengan $X \subset X^*$ dan X padat di $X^*(\bar{X} = X^*)$.

DAFTAR PUSTAKA

[1]. Morris SA. Topology Without Tears [Internet]. 2012 [updated 2012 Feb 20; cited 2012 Okt 1]. Available from: http://www.topologywithouttears.net/topbook.pdf

[2]. Aphane M. On Some Result Of Analysis In Metric Spaces And Fuzzy Metric Spaces [Internet]. 2010 [updated 2009 Des; cited 2012 Mar 29]. Available from: http://uir.unisa.ac.za/bitstream/handle/10500/3224/dissertation_aphane_m.pdf?sequence=1

[3]. America P, Rutten J. Solving Reflexive Domain Equations in a Category of Complete Metric Spaces. *Journal Of Computer And System Sciences*. 1989; 39:343-375.

[4]. Bult F. Completing Metric Spaces Using Cauchy-Sequences [Internet]. 2010 [updated 2010 Okt 27; cited 2012 Mar 24]. Available from: http://www.math.caltech.edu/~2010-11/1term/ma108a/completion.pdf

[5]. Abdeljawad, T. Completion Of Cone Metric Spaces. *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*. 2010; 39(1):67-74.

[6]. Sahin I, Telci M. Fixed Point Of Contractive Mappings On Complete Cone Metric Spaces. *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistic*. 2009; 38(1):59-67.Lebl J. *Basic Analysis Introduction to Real Analysis*. San Francisco, California, USA: Creative

[7]. Darmawijaya S. *Pengantar Analisis Abstrak*. Yogyakarta: Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam UGM; 2007.

[8]. Complete Metric Spaces [Internet]. [cited 2012 Jan 24]. Available from: http://pioneer.netserv.chula.ac.th/~lwicharn/2301631/Complete.pdf

[9]. Pushnitski A. CMMS05 Basic Analysis [Internet]. 2009 [cited 2012 Mar 25]. Available from: http://people.math.jussieu.fr/~lefevere/analysis_notes.pdf

ANDI RINI : Jurusan Matematika FMIPA Untan, wida.alwafa@yahoo.com

SUGIATNO : Jurusan Pendidikan Matematika FKIP Untan, giatno66@gmail.com

BAYU PRIHANDONO : Jurusan Matematika FMIPA Untan, beiprihandono@gmail.com