Buletin Ilmiah Mat. Stat. dan Terapannya (Bimaster)
Volume 05, No. 3 (2016), hal 195 – 204.

PENYELESAIAN PERSAMAAN DIFERENSIAL PARSIAL LINEAR DENGAN MENGGUNAKAN METODE TRANSFORMASI *ARTION-FUNDO*

Naufal Helmi, Mariatul Kiftiah, Bayu Prihandono

INTISARI

Persamaan diferensial parsial linear (PDPL) dapat diselesaikan secara analitik dan numerik. Salah satu penyelesaian PDPL secara analitik yaitu dengan menggunakan metode transformasi Artion-Fundo. Tujuan dari penelitian ini adalah untuk menentukan penyelesaian PDPL menggunakan metode transformasi Artion-Fundo. Penyelesaian persamaan diferensial parsial linear dengan metode transformasi Artion-Fundo dilakukan dengan cara mentransformasikan PDPL sehingga diperoleh persamaan diferensial biasa linear (PDBL). Selanjutnya PDBL yang diperoleh diselesaikan, dan kemudian penyelesaian dari PDBL ditransformasikan dengan menggunakan invers transformasi Artion-Fundo. Hasil inversi penyelesaian PDBL merupakan penyelesaian dari PDPL. Penelitian ini menunjukkan bahwa transformasi Artion-Fundo dapat menyelesaikan PDPL orde satu dan orde dua dengan koefisien konstan.

Kata kunci : *Transformasi Artion-Fundo, Persamaan Diferensial Parsial Linear*

PENDAHULUAN

Secara umum persamaan diferensial terbagi dalam dua jenis persamaan, yaitu persamaan diferensial biasa dan persamaan diferensial parsial. Dalam teknik penyelesaiannya, persamaan diferensial dapat diselesaikan dengan menggunakan metode analitik dan numerik. Umumnya, persamaan diferensial diselesaikan dengan menggunakan metode analitik, tetapi terdapat beberapa kasus persamaan diferensial parsial yang tidak dapat diselesaikan dengan metode analitik sehingga alternatif pemecahan solusinya dilakukan dengan menggunakan metode numerik. Namun seiring dengan berkembangnya metode, persamaan diferensial tersebut ternyata bisa diselesaikan dengan metode analitik. Salah satu metode analitik yang dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial parsial adalah transformasi *Artion-Fundo*.

Transformasi *Artion-Fundo* merupakan salah satu bentuk transformasi integral yang diperkenalkan oleh Artion Kashuri dan Akli Fundo pada tahun 2013. Transformasi *Artion-Fundo* merupakan suatu metode yang dapat menyederhanakan persamaan diferensial biasa menjadi bentuk persamaan aljabar dan telah ditunjukkan pula bahwa transformasi *Artion-Fundo* dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial biasa linear orde satu dan orde dua [1]. Transformasi *Artion-Fundo* juga dapat diterapkan pada persamaan diferensial parsial linear. Penyelesaian persamaan diferensial parsial linear diperoleh dengan melakukan inversi terhadap penyelesaian persamaan hasil transformasi dengan menggunakan invers transformasi *Artion-Fundo*. Kelebihan utama dari metode transformasi *Artion-Fundo* adalah dapat menyelesaikan persamaan diferensial linear homogen maupun tak homogen. Selain itu, metode transformasi *Artion-Fundo* juga dapat menghasilkan penyelesaian khusus sesuai dengan syarat awal dan syarat batas yang diberikan. Namun, apabila persamaan diferensial yang diketahui tidak melibatkan syarat awal dan syarat batas, maka persamaan diferensial tersebut tidak dapat diselesaikan dengan menggunakan metode transformasi *Artion-Fundo*.

Adapun tujuan dari penelitian ini adalah mengkaji sifat-sifat dari transformasi *Artion-Fundo* dan menyelesaikan persamaan diferensial parsial linear (PDPL) menggunakan sifat-sifat dari transformasi *Artion-Fundo*. Penelitian ini membahas tentang penyelesaian PDPL orde satu dan orde dua dengan koefisien konstan yang melibatkan syarat awal dan syarat batas dengan dua variabel bebas.

Langkah-langkah penyelesaian PDPL orde satu dan orde dua dilakukan dengan mentransformasi kedua ruas pada PDPL dengan menggunakan definisi dan sifat-sifat dari transformasi *Artion-Fundo* sehingga diperoleh suatu persamaan hasil transformasi. Setelah itu, syarat awal PDPL yang diketahui disubstitusikan pada persamaan hasil transformasi sehingga diperoleh suatu persamaan diferensial biasa linear (PDBL). Kemudian PDBL yang diperoleh diselesaikan sehingga diperoleh penyelesaian umum dari PDBL. Selanjutnya syarat batas yang diketahui ditransformasi menggunakan transformasi *Artion-Fundo* dan hasil transformasi syarat batas disubstitusikan pada penyelesaian umum sehingga diperoleh penyelesaian khusus PDBL. Kemudian penyelesaian khusus PDBL yang diperoleh ditransformasi dengan menggunakan invers transformasi *Artion-Fundo* sehingga diperoleh penyelesaian dari PDPL.

TRANSFORMASI *ARTION-FUNDO*

Transformasi *Artion-Fundo* merupakan salah satu transformasi integral baru yang diperkenalkan oleh Artion Kashuri dan Akli Fundo pada tahun 2013. Transformasi *Artion-Fundo* didefinisikan untuk suatu fungsi f dengan satu variabel bebas.

Definisi 1 [1] *Diberikan fungsi $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ yang terdefinisi untuk $t \in \mathbb{R}^+$. Transformasi Artion-Fundo dari fungsi f didefinisikan sebagai*

$$K[f(t)] = \frac{1}{v}\int_0^\infty f(t)\, e^{-\frac{t}{v^2}}\, dt = A(v) \tag{1}$$

dengan $v \in (-k_1, k_2)$ adalah variabel dalam transformasi Artion-Fundo untuk $k_1 > 0$ dan $k_2 > 0$ dengan $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$.

Transformasi *Artion-Fundo* dari fungsi f dinyatakan dalam notasi $K[f(t)]$ dengan K adalah operator transformasi *Artion-Fundo*. Transformasi *Artion-Fundo* dalam Persamaan (1) juga dapat dinyatakan dalam bentuk persamaan

$$K[f(t)] = v\int_0^\infty f(v^2 t)\, e^{-t}\, dt$$

Transformasi *Artion-Fundo* untuk beberapa fungsi dasar disajikan dalam Tabel 1.

Tabel 1. Transformasi *Artion-Fundo* Beberapa Fungsi Dasar

No.	$f(t)$	$A(v) = K[f(t)]$
1	a	av
2	$t^n, \quad n = 0,1,2,\cdots$	$n!\, v^{2n+1}$
3	e^{at}	$\frac{v}{1 - av^2}$
4	$\sin at$	$\frac{av^3}{1 + a^2v^4}$
5	$\cos at$	$\frac{v}{1 + a^2v^4}$
6	$\sinh at$	$\frac{av^3}{1 - a^2v^4}$
7	$\cosh at$	$\frac{v}{1 - a^2v^4}$

SIFAT-SIFAT TRANSFORMASI *ARTION-FUNDO*

Transformasi *Artion-Fundo* suatu fungsi f dapat lebih mudah diperoleh dengan menggunakan sifat-sifat transformasi *Artion-Fundo*. Sifat-sifat dari transformasi *Artion-Fundo* dinyatakan dalam teorema-teorema berikut ini.

Teorema 2 *Jika* $K[f(t)] = A_1(v)$ *dan* $K[g(t)] = A_2(v)$, *maka untuk sebarang konstanta* a, b, *dan* c *berlaku*

a. $K[af(t)] = aA(v)$

b. $K[bf(t) \pm cg(t)] = bA_1(v) \pm cA_2(v)$

Bukti:

a. $$K[af(t)] = \frac{1}{v}\int_0^\infty af(t)\, e^{-\frac{t}{v^2}}\, dt$$
$$= b\left(\frac{1}{v}\int_0^\infty f(t)\, e^{-\frac{t}{v^2}}\, dt\right)$$
$$= aK[f(t)]$$
$$= aA(v) \qquad \blacksquare$$

b. $$K[bf(t) \pm cg(t)] = \frac{1}{v}\int_0^\infty \big(bf(t) \pm cg(t)\big)\, e^{-\frac{t}{v^2}}\, dt$$
$$= b\left(\frac{1}{v}\int_0^\infty f(t)\, e^{-\frac{t}{v^2}}\, dt\right) \pm c\left(\frac{1}{v}\int_0^\infty g(t)\, e^{-\frac{t}{v^2}}\, dt\right)$$
$$= bK[f(t)] \pm cK[g(t)]$$
$$= bA_1(v) \pm cA_2(v) \qquad \blacksquare$$

Teorema 3 *Jika* $K[f(t)] = A(v)$, *maka untuk sebarang konstanta* a *berlaku*

$$K[e^{at}f(t)] = \frac{1}{\sqrt{1-av^2}} A\left(\frac{v}{\sqrt{1-av^2}}\right)$$

Bukti:

$$K[e^{at}f(t)] = \frac{1}{v}\int_0^\infty f(t)\, e^{-\frac{(1-av^2)t}{v^2}}\, dt \tag{2}$$

Misalkan $w = (1-av^2)t$, maka $dt = \dfrac{dw}{1-av^2}$ sehingga Persamaan (2) menjadi

$$K[e^{at}f(t)] = \frac{1}{v}\int_0^\infty f\left(\frac{w}{1-av^2}\right) e^{-\frac{w}{v^2}}\, \frac{dw}{1-av^2}$$
$$= K\left[\frac{1}{1-av^2} f\left(\frac{w}{1-av^2}\right)\right]$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1-av^2}} A\left(\frac{v}{\sqrt{1-av^2}}\right) \qquad \blacksquare$$

Teorema 4 *Jika* $K[f(t)] = A(v)$ *dan* $g(t) = \begin{cases} 0 & , \ 0 \le t < a \\ f(t-a) \ , & t \ge a \end{cases}$*, maka untuk sebarang konstanta* a *dan* $a > 0$ *berlaku*

$$K[g(t)] = e^{-\frac{a}{v^2}} A(v)$$

Bukti:

$$K[g(t)] = \frac{1}{v}\int_0^\infty g(t)\, e^{-\frac{t}{v^2}}\, dt$$

$$= \frac{1}{v}\int_a^\infty f(t-a)\, e^{-\frac{t}{v^2}}\, dt \qquad (3)$$

Misalkan $t - a = k$ maka $dt = dk$ sehingga Persamaan (3) menjadi

$$K[f(t-a)H(t-a)] = \frac{1}{v}\int_0^\infty f(k)\, e^{-\frac{k+a}{v^2}}\, dk$$

$$= e^{-\frac{a}{v^2}} K[f(k)]$$

$$= e^{-\frac{a}{v^2}} A(v) \qquad \blacksquare$$

Teorema 5 *Jika* $K[f(t)] = A(v)$*, maka untuk* $n = 1,2,3 \cdots$ *berlaku*

$$K\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = \frac{A(v)}{v^{2n}} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{v^{2(n-k)-1}} \frac{d^k f(0)}{dt^k}$$

Bukti:

Pembuktian Teorema 5 dilakukan menggunakan induksi matematika.

Misalkan P adalah pernyataan

$$K\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = \frac{A(v)}{v^{2n}} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{v^{2(n-k)-1}} \frac{d^k f(0)}{dt^k}$$

1) Akan ditunjukkan P bernilai benar untuk $n = 1$ atau $K\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = \frac{A(v)}{v^2} - \frac{f(0)}{v}$.

$$K\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = \frac{1}{v}\int_0^\infty \frac{df(t)}{dt}\, e^{-\frac{t}{v^2}}\, dt$$

$$= \lim_{L\to\infty}\left(\left(\frac{1}{v} f(t) e^{-\frac{t}{v^2}}\right)\Big|_0^L + \frac{1}{v^3}\int_0^L f(t)\, e^{-\frac{t}{v^2}}\, dt\right)$$

$$= \frac{1}{v^2}\left(\frac{1}{v}\int_0^\infty f(t)\, e^{-\frac{t}{v^2}}\, dt\right) - \frac{1}{v} f(0)$$

$$= \frac{A(v)}{v^2} - \frac{f(0)}{v}$$

Karena $K\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = \frac{A(v)}{v^2} - \frac{f(0)}{v}$, maka terbukti bahwa P bernilai benar untuk $n = 1$.

2) Diasumsikan P bernilai benar untuk $n = q$ atau $K\left[\frac{d^q f(t)}{dt^q}\right] = \frac{A(v)}{v^{2q}} - \sum_{k=0}^{q-1} \frac{1}{v^{2(q-k)-1}} \frac{d^k f(0)}{dt^k}$.

   Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa P bernilai benar untuk $n = q + 1$. Misalkan $\psi(t) = \frac{d^q f(t)}{dt^q}$ dengan $K[\psi(t)] = \Psi(v)$, maka

$$\begin{aligned} K\left[\frac{d^{q+1} f(t)}{dt^{q+1}}\right] &= K\left[\frac{d\psi(t)}{dt}\right] \\ &= \frac{\Psi(v)}{v^2} - \frac{\psi(0)}{v} \\ &= \frac{1}{v^2}\left(\frac{A(v)}{v^{2q}} - \sum_{k=0}^{q-1} \frac{1}{v^{2(q-k)-1}} \frac{d^k f(0)}{dt^k}\right) - \frac{1}{v}\left(\frac{d^q f(0)}{dt^q}\right) \\ &= \frac{A(v)}{v^{2(q+1)}} - \sum_{k=0}^{q} \frac{1}{v^{2((q+1)-k)-1}} \frac{d^k f(0)}{dt^k} \end{aligned}$$

   Karena $K\left[\frac{d^{q+1} f(t)}{dt^{q+1}}\right] = \frac{A(v)}{v^{2(q+1)}} - \sum_{k=0}^{q} \frac{1}{v^{2((q+1)-k)-1}} \frac{d^k f(0)}{dt^k}$, maka terbukti bahwa P bernilai benar untuk $n = q + 1$.

Dari pernyataan 1) dan 2) dapat disimpulkan bahwa Teorema 5 terbukti.

Teorema 6 *Jika* $K[f(t)] = A(v)$, *maka untuk* $n = 1,2,3 \cdots$ *berlaku*

$$K\left[\int_0^t \int_0^t \cdots \int_0^t f(\tau)\, d\tau^n\right] = v^{2n} A(v)$$

Bukti:
Pembuktian Teorema 6 dilakukan menggunakan induksi matematika.

Misalkan R adalah pernyataan

$$K\left[\int_0^t \int_0^t \cdots \int_0^t f(\tau)\, d\tau^n\right] = v^{2n} A(v)$$

1) Akan ditunjukkan R bernilai benar untuk $n = 1$ atau $K\left[\int_0^t f(\tau)\, d\tau\right] = v^2 A(v)$.

   Misalkan $h(t) = \int_0^t f(\tau)\, d\tau$, maka $\frac{dh(t)}{dt} = f(t)$ dan $h(0) = 0$, dan misalkan $K[h(t)] = H(v)$.

   Dengan menggunakan Teorema 4 untuk $n = 1$ diperoleh

$$\begin{aligned} K\left[\frac{dh(t)}{dt}\right] = K[f(t)] &\Leftrightarrow \frac{H(v)}{v^2} - \frac{h(0)}{v} = A(v) \\ &\Leftrightarrow \frac{H(v)}{v^2} - \frac{(0)}{v} = A(v) \\ &\Leftrightarrow H(v) = v^2 A(v) \end{aligned}$$

$$K\left[\frac{dh(t)}{dt}\right] = K[f(t)] \Leftrightarrow K[h(t)] = v^2 A(v)$$
$$\Leftrightarrow K\left[\int_0^t f(\tau)\, d\tau\right] = v^2 A(v)$$

Karena $K\left[\int_0^t f(\tau)\, d\tau\right] = v^2 A(v)$, maka terbukti bahwa *R* benar untuk $n = 1$.

2) Diasumsikan R bernilai benar untuk $n = r$ atau $K\left[\int_0^t \int_0^t \cdots \int_0^t f(\tau)\, d\tau^r\right] = v^{2r} A(v)$.

Akan ditunjukkan bahwa *R* bernilai benar untuk $n = r + 1$. Misalkan $\omega(t) = \int_0^t \int_0^t \cdots \int_0^t f(\tau)\, d\tau^r$ dengan $K[\omega(t)] = \Omega(v)$, maka

$$\begin{aligned} K\left[\int_0^t \int_0^t \cdots \int_0^t \int_0^t f(\tau)\, d\tau^{r+1}\right] &= K\left[\int_0^t \omega(t)\, d\tau\right] \\ &= v^2 \Omega(v) \\ &= v^2\left(v^{2r} A(v)\right) \\ &= v^{2(r+1)} A(v) \end{aligned}$$

Karena $K\left[\int_0^t \int_0^t \cdots \int_0^t \int_0^t f(\tau)\, d\tau^{r+1}\right] = v^{2(r+1)} A(v)$, maka terbukti bahwa *R* bernilai benar untuk $n = r + 1$.

Dari pernyataan 1) dan 2) dapat disimpulkan bahwa Teorema 6 terbukti.

Teorema 7 *Jika* $K[f(t)] = A_1(v)$ *dan* $K[g(t)] = A_2(v)$ *dan* $h(t) = \int_0^t f(\tau) g(t-\tau) d\tau$, *maka*

$$K[h(t)] = v A_1(v) A_2(v)$$

Bukti:

$$\begin{aligned} K[h(t)] &= \frac{1}{v}\int_0^\infty h(t)\, e^{-\frac{t}{v^2}}\, dt \\ &= \frac{1}{v}\int_0^\infty \left(\int_0^t f(\tau) g(t-\tau)\, d\tau\right) e^{-\frac{t}{v^2}}\, dt \end{aligned} \qquad (4)$$

Misalkan $\omega = t - \tau$, maka $dt = d\omega$ sehingga Persamaan (4) menjadi

$$\begin{aligned} K[h(t)] &= \frac{1}{v}\int_0^\infty f(\tau)\, e^{-\frac{\tau}{v^2}}\, d\tau \int_0^\infty g(\omega)\, e^{-\frac{\omega}{v^2}}\, d\omega \\ &= v\, K[f(t)]\, K[g(t)] \\ &= v A_1(v) A_2(v) \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

INVERS TRANSFORMASI *ARTION-FUNDO*

Definisi transformasi *Artion-Fundo* menyatakan bahwa tranformasi fungsi f adalah suatu fungsi yang dinyatakan dalam notasi $A(v)$. Apabila transformasi dari suatu fungsi diketahui, maka hasil inversi fungsi transformasi tersebut akan menghasilkan fungsi asal.

Definisi 8 [1] *Jika $A(v) = K[f(t)]$ adalah transformasi Artion-Fundo dari $f(t)$, maka $f(t)$ adalah invers dari transformasi Artion-Fundo $A(v)$ yang dinotasikan dengan*

$$K^{-1}[A(v)] = f(t)$$

dan K^{-1} adalah operator invers transformasi Artion-Fundo.

PENYELESAIAN PERSAMAAN DIFERENSIAL PARSIAL LINEAR

Transformasi *Artion-Fundo* dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial parsial linear (PDPL). PDPL yang ditransformasi menggunakan transformasi *Artion-Fundo* akan direduksi menjadi persamaan diferensial biasa linear (PDBL). Penyelesaian PDPL diperoleh dengan melakukan inversi terhadap penyelesaian PDBL dengan menggunakan invers transformasi *Artion-Fundo*.

Contoh 9 Persamaan diferensial parsial linear tak homogen orde satu
Tentukan penyelesaian dari persamaan diferensial yang dinyatakan dalam persamaan

$$\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial t} = 1 - e^{-t} \tag{5}$$

dengan syarat awal $z(x, 0) = x$ dan syarat batas $z(1, t) = 2 - e^{-t}$.

Penyelesaian:
Kedua ruas Persamaan (5) ditransformasi dengan menggunakan transformasi *Artion-Fundo* sehingga diperoleh

$$K\left[\frac{\partial z(x,t)}{\partial x}\right] - K\left[\frac{\partial z(x,t)}{\partial t}\right] = K[1] - K[e^{-t}]$$

$$\Leftrightarrow \frac{dZ(x,v)}{dx} - \left(\frac{Z(x,v)}{v^2} - \frac{z(x,0)}{v}\right) = v - \frac{v}{1+v^2} \tag{6}$$

Dengan mensubstitusikan syarat awal $z(x, 0) = x$ pada Persamaan (4.6) diperoleh

$$\frac{dZ(x,v)}{dx} - \frac{1}{v^2}Z(x,v) = \frac{v^3}{1+v^2} - \frac{x}{v} \tag{7}$$

Selanjutnya Persamaan (7) diselesaikan dengan menggunakan metode *Lagrange* sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} Z(x,v) &= \frac{1}{e^{-\frac{x}{v^2}}}\left(\int \left(\frac{v^3}{1+v^2} - \frac{x}{v}\right) e^{-\frac{x}{v^2}}\, dx + C\right) \\ &= \frac{1}{e^{-\frac{x}{v^2}}} \int \left(\frac{v^3}{1+v^2} e^{-\frac{x}{v^2}} - \frac{1}{v} x e^{-\frac{x}{v^2}}\right) dx + \frac{C}{e^{-\frac{x}{v^2}}} \\ &= \frac{1}{e^{-\frac{x}{v^2}}}\left(-\frac{v^5}{1+v^2} e^{-\frac{x}{v^2}} + (vx + v^3) e^{-\frac{x}{v^2}}\right) + \frac{C}{e^{-\frac{x}{v^2}}} \\ &= v - \frac{v}{1+v^2} + vx + Ce^{\frac{x}{v^2}} \end{aligned} \tag{8}$$

Persamaan (8) adalah penyelesaian umum dari Persamaan (7). Selanjutnya syarat batas yang diketahui, yaitu $z(1, t) = 2 - e^{-t}$ ditransformasi menggunakan transformasi *Artion-Fundo* sehingga diperoleh

$$K[z(1,t)] = K[2 - e^{-t}] \Leftrightarrow Z(1,v) = 2v - \frac{v}{1+v^2} \tag{9}$$

Dengan menggunakan Persamaan (9), maka dari Persamaan (8) diperoleh $C = 0$, sehingga diperoleh penyelesaian khusus Persamaan (7) yaitu

$$Z(x,v) = v - \frac{v}{1+v^2} + vx \tag{10}$$

Kemudian Persamaan (10) ditransformasi menggunakan invers transformasi *Artion-Fundo* sehingga diperoleh

$$K^{-1}[Z(x,v)] = K^{-1}[v] - K^{-1}\left[\frac{v}{1+v^2}\right] + xK^{-1}[v]$$

$$\Leftrightarrow z(x,t) = 1 - e^{-t} + x$$

Jadi, penyelesaian Persamaan (5) dengan syarat awal $z(x,0) = x$ dan syarat batas $z(1,t) = 2 - e^{-t}$ adalah $z(x,t) = 1 - e^{-t} + x$.

Contoh 10 Persamaan diferensial parsial linear homogen orde dua
Tentukan penyelesaian dari persamaan diferensial yang dinyatakan dalam persamaan

$$4\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = 0 \tag{11}$$

dengan syarat awal $z(x,0) = 4\sin \pi x + 3\sin 2\pi x - 2\sin 3\pi x$, dan $z_t(x,0) = 0$ serta syarat batas $z(0,t) = z(1,t) = 0$.

Penyelesaian:
Kedua ruas Persamaan (11) ditransformasi dengan menggunakan transformasi *Artion-Fundo* sehingga diperoleh

$$4K\left[\frac{\partial^2 z(x,t)}{\partial x^2}\right] - K\left[\frac{\partial z^2(x,t)}{\partial t^2}\right] = K[0]$$

$$\Leftrightarrow 4\frac{d^2 Z(x,v)}{dx^2} - \left(\frac{Z(x,v)}{v^4} - \frac{z(x,0)}{v^3} - \frac{1}{v}\frac{dz(x,0)}{dt}\right) = 0 \tag{12}$$

Dengan mensubstitusikan syarat awal $z(x,0) = 4\sin \pi x + 3\sin 2\pi x - 2\sin 3\pi x$ dan $z_t(x,0) = 0$ pada Persamaan (12) diperoleh

$$\frac{d^2 Z(x,v)}{dx^2} - \frac{1}{4v^4}Z(x,v) = -\frac{4\sin \pi x + 3\sin 2\pi x - 2\sin 3\pi x}{4v^3} \tag{13}$$

Penyelesaian homogen untuk Persamaan (13) adalah

$$Z_h(x,v) = C_1 e^{\frac{x}{2v^2}} + C_2 e^{-\frac{x}{2v^2}} \tag{14}$$

Selanjutnya Persamaan (7) diselesaikan menggunakan metode variasi parameter, sehingga penyelesaian umum Persamaan (13) adalah

$$Z(x,v) = -e^{\frac{x}{2v^2}}\left(\int \frac{\left(-\frac{4\sin\pi x+3\sin 2\pi x-2\sin 3\pi x}{4v^3}\right)e^{-\frac{x}{2v^2}}}{\left(-\frac{1}{v^2}\right)}dx + C\right)$$

$$+e^{-\frac{x}{2v^2}}\left(\int \frac{\left(-\frac{4\sin\pi x+3\sin 2\pi x-2\sin 3\pi x}{4v^3}\right)e^{\frac{x}{2v^2}}}{\left(-\frac{1}{v^2}\right)}dx + C_2\right)$$

$$= \frac{2v(2\pi v^2\cos(\pi x) + \sin(\pi x))}{1+4\pi^2 v^4} + \frac{3v(4\pi v^2\cos(2\pi x) + \sin(2\pi x))}{2(1+16\pi^2 v^4)}$$

$$-\frac{v(6\pi v^2\cos(3\pi x) + \sin(3\pi x))}{1+36\pi^2 v^4} + \frac{2v(\sin(\pi x) - 2\pi v^2\cos(\pi x))}{1+4\pi^2 v^4}$$

$$+\frac{3v(\sin(2\pi x)-4\pi v^2\cos(2\pi x))}{2(1+16\pi^2v^4)}-\frac{v(\sin(3\pi x)-6\pi v^2\cos(3\pi x))}{1+36\pi^2v^4}$$
$$-Ce^{\frac{x}{2v^2}}+C_2e^{-\frac{x}{2v^2}}$$

$$Z(x,v)=C_1e^{\frac{x}{2v^2}}+C_2e^{-\frac{x}{2v^2}}+\frac{4v\sin(\pi x)}{1+4\pi^2v^4}+\frac{3v\sin(2\pi x)}{1+16\pi^2v^4}-\frac{2v\sin(3\pi x)}{1+36\pi^2v^4} \tag{15}$$

Selanjutnya syarat batas yang diketahui ditransformasi menggunakan transformasi *Artion-Fundo*.

a) Untuk syarat batas $z(0,t)=0$:

$$K[z(0,t)]=K[0]\Leftrightarrow Z(0,v)=0$$

sehingga dari Persamaan (15) diperoleh

$$Z(0,v)=C_1+C_2\Leftrightarrow C_1+C_2=0 \tag{16}$$

b) Untuk syarat batas $z(1,t)=0$:

$$K[z(1,t)]=K[0]\Leftrightarrow Z(1,v)=0$$

sehingga dari Persamaan (15) diperoleh diperoleh

$$Z(1,v)=C_1e^{\frac{1}{2v^2}}+C_2e^{-\frac{1}{2v^2}}\Leftrightarrow C_1e^{\frac{1}{2v^2}}+C_2e^{-\frac{1}{2v^2}}=0 \tag{17}$$

Dari Persamaan (16) dan (17) diperoleh $C_1=0$ dan $C_2=0$, sehingga diperoleh penyelesaian khusus Persamaan (13) yaitu

$$Z(x,v)=\frac{4v\sin(\pi x)}{1+4\pi^2v^4}+\frac{3v\sin(2\pi x)}{1+16\pi^2v^4}-\frac{2v\sin(3\pi x)}{1+36\pi^2v^4} \tag{18}$$

Kemudian Persamaan (18) ditransformasi menggunakan invers transformasi *Artion-Fundo* sehingga diperoleh

$$K^{-1}[Z(x,v)]=4K^{-1}\left[\frac{v\sin(\pi x)}{1+4\pi^2v^4}\right]+3K^{-1}\left[\frac{v\sin(2\pi x)}{1+16\pi^2v^4}\right]-2K^{-1}\left[\frac{v\sin(3\pi x)}{1+36\pi^2v^4}\right]$$
$$\Leftrightarrow z(x,t)=4\sin(\pi x)\cos(2\pi t)+3\sin(2\pi x)\cos(4\pi t)-2\sin(3\pi x)\cos(6\pi t)$$

Jadi, penyelesaian dari Persamaan (11) dengan syarat awal $z(x,0)=4\sin\pi x+3\sin 2\pi x-2\sin 3\pi x$ dan $z_t(x,0)=0$, serta syarat batas $z(0,t)=z(1,t)=0$ adalah $z(x,t)=4\sin(\pi x)\cos(2\pi t)+3\sin(2\pi x)\cos(4\pi t)-2\sin(3\pi x)\cos(6\pi t)$.

PENUTUP

Dari hasil penelitian ini dapat disimpulkan bahwa:

1. Sifat-sifat transformasi *Artion-Fundo* yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial parsial linear orde satu dan dua adalah sebagai berikut:

   a. Transformasi *Artion-Fundo* dari $\dfrac{\partial^2 z(x,t)}{\partial x^2}$ adalah

   $$K\left[\frac{\partial^2 z(x,t)}{\partial x^2}\right]=\frac{d^2Z(x,v)}{dx^2}$$

   b. Transformasi *Artion-Fundo* dari $\dfrac{\partial^2 z(x,t)}{\partial x\partial t}$ adalah

   $$K\left[\frac{\partial^2 z(x,t)}{\partial x\partial t}\right]=\frac{d}{dx}\left(\frac{Z(x,v)}{v^2}-\frac{z(x,0)}{v}\right)$$

c. Transformasi *Artion-Fundo* dari $\frac{\partial^2 z(x,t)}{\partial t^2}$ adalah

$$K\left[\frac{\partial^2 z(x,t)}{\partial t^2}\right] = \frac{Z(x,v)}{v^4} - \frac{z(x,0)}{v^3} - \frac{1}{v}\frac{dz(x,0)}{dt}$$

d. Transformasi *Artion-Fundo* dari $\frac{\partial z(x,t)}{\partial x}$ adalah

$$K\left[\frac{\partial z(x,t)}{\partial x}\right] = \frac{dZ(x,v)}{dx}$$

e. Transformasi *Artion-Fundo* dari $\frac{\partial z(x,t)}{\partial t}$ adalah

$$K\left[\frac{\partial z(x,t)}{\partial t}\right] = \frac{Z(x,v)}{v^2} - \frac{z(x,0)}{v}$$

f. Transformasi *Artion-Fundo* dari $z(x,t)$ dan $s(x,t)$ adalah

$$K[z(x,t)] = Z(x,v) = \frac{1}{v}\int_0^\infty z(x,t)\, e^{-\frac{t}{v^2}}\, dt \quad \text{dan} \quad K[s(x,t)] = A(x,v) = \frac{1}{v}\int_0^\infty s(x,t)\, e^{-\frac{t}{v^2}}\, dt$$

2. Transformasi *Artion-Fundo* dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial parsial linear dengan koefisien konstan yang melibatkan syarat awal dan syarat batas. Penerapan sifat-sifat dari transformasi *Artion-Fundo* dalam menyelesaikan persamaan diferensial parsial linear dengan koefisien konstan akan mereduksi persamaan diferensial parsial menjadi persamaan diferensial biasa. Selanjutnya dengan menerapkan invers transformasi *Artion-Fundo* pada penyelesaian persamaan diferensial biasa diperoleh penyelesaian dari persamaan diferensial parsial.

DAFTAR PUSTAKA

[1]. Kashuri A, Fundo A, Kreku M. Mixture of A New Integral Transform and Homotopy Perturbation Method for Solving Nonlinear Partial Differential Equations. *Advances in Pure Mathematics*. 2013; 3(1): 317-323.

[2]. Kashuri A, Fundo A, Liko R. On Double New Integral Transform and Double Laplace Transform. *European Scientific*. 2013; 9(33): 82-90.

[3]. Prayudi. *Matematika Teknik.* Yogyakarta: Graha Ilmu; 2006.

[4]. Raji A W Md and Mohamad M N. *Differential Equations for Engineering Students.* Johor Bahru: Comtech Marketing Sdn. Bhd; 2008.

[5]. Darmawijaya S. *Pengantar Analisis Real.* Yogyakarta: Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam UGM; 2006.

[6]. Wrede R C and Spiegel M R. *Schaum's Outlines of Theory and Problems of Advanced Calculus.* 2nd ed. New York: McGraw-Hill; 2002.

NAUFAL HELMI : FMIPA Untan, Pontianak, noval6794@gmail.com
MARIATUL KIFTIAH : FMIPA Untan, Pontianak, kiftiahmariatul@math.untan.ac.id
BAYU PRIHANDONO : FMIPA Untan, Pontianak, beiprihandono@gmail.com